第二十七章　相似

27.1　图形的相似

课时 1　相似图形及成比例线段

刷基础

1. A　【解析】根据相似图形的定义可知两个矩形不一定相似，但两个正方形、两个等边三角形及两个圆一定相似，故选 A.

2. 相似　【解析】∵ 用放大镜将图形放大，两个图形的形状相同，大小不同，∴ 这两个图形相似，故答案为相似.

3. C　【解析】A 选项，因为$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，所以 $3a=2b$，故本选项不符合题意；B 选项，当 $a=4$，$b=6$ 时，$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，但$\frac{a+1}{b+1}\neq\frac{3}{4}$，故本选项不符合题意；C 选项，因为$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，所以$\frac{a+b}{b}=\frac{5}{3}$，故本选项符合题意；D 选项，因为$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，所以$\frac{a-b}{b}=-\frac{1}{3}$，故本选项不符合题意. 故选 C.

4. 1∶7 500　【解析】∵ 18 km = 1 800 000 cm，∴ 规划图采用的比例尺是$\frac{240}{1\ 800\ 000}=\frac{1}{7\ 500}$. 故答案为 1∶7 500.

5. $\frac{3}{2}$或$\frac{8}{3}$或 6　【解析】设这个数是 x. 由题意得，当 $2:3=4:x$ 时，$2x=12$，解得 $x=6$；当 $2:x=3:4$时，$3x=8$，解得 $x=\frac{8}{3}$；当 $x:2=3:4$时，$4x=6$，解得 $x=\frac{3}{2}$. 综上，这个数可以是 6 或$\frac{8}{3}$或$\frac{3}{2}$.

易错警示　本题未明确四个数的顺序，注意分情况讨论.

刷素养

6. (1)【证明】设 $BD=x$，则 $AB=2x$. 由勾股定理得 $AD=\sqrt{5}x$. ∵ $DE=BD$，$AE=AC$，∴ $AC=AE=AD-DE=AD-BD=(\sqrt{5}-1)x$，∴ $\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，∴ C 是线段 AB 的黄金分割点.

(2) $3-\sqrt{5}$　【解析】当 $BD=1$ 时，由 (1) 知 $AB=2$，$AC=\sqrt{5}-1$，∴ $BC=AB-AC=2-(\sqrt{5}-1)=3-\sqrt{5}$. 故答案为 $3-\sqrt{5}$.

课时 2　相似多边形

刷基础

1. B　【解析】∵ 两个大小不一的五边形 $ABCDE$ 和五边形 $FBCHG$ 的对应边不成比例，∴ 五边形 $ABCDE$ 和五边形 $FBCHG$ 一定不相似.

2. C　【解析】设方格纸中每个小正方形的边长均为 1. ∵ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $EFGH$ 相似，且 AB 与 EF 是对应边，∴ 相似比是$\frac{AB}{EF}=\frac{8}{4}=2$，即 2∶1.

3. 2∶5　【解析】设原正多边形的边长为 1. ∵ 把一个正多边形的边长扩大到原来的 2.5 倍，∴ 扩大后的正多边形的边长为 2.5，∴ 原图与新图的相似比为$\frac{1}{2.5}$，即 2∶5.

4. C　【解析】∵ ▱$ABCD$ 与 ▱$AFEB$ 相似，∴ $\frac{AB}{AF}=\frac{AD}{AB}$，∴ $AB^2=AD\cdot AF$. 又∵ $AF=2$，$AD=4$，∴ $AB^2=8$，∴ $AB=2\sqrt{2}$或$-2\sqrt{2}$(舍去)，∴ AB 的长为 $2\sqrt{2}$. 故选 C.

关键点拨　分清对应边是解决本题的关键，然后根据相似多边形的性质得出比例式，即可得到答案.

5. B　【解析】∵ 原矩形的长为 25，宽为 x，∴ 小矩形的长为 x，宽为$\frac{25}{5}=5$. ∵ 小矩形与原矩形相似，∴ $\frac{x}{25}=\frac{5}{x}$，解得 $x=5\sqrt{5}$或$-5\sqrt{5}$(舍去)，故选 B.

6. D　【解析】原矩形的长和宽分别为 3 cm 和 2 cm，∴ 原矩形的周长为 2×(2+3) = 10(cm). 由题图知，扩张后的矩形宽为 4 cm，长为 $(3+2a)$ cm. ∵ 矩形 $A'B'C'D'$ 与矩形 $ABCD$ 相似，∴ $\frac{2}{3}=\frac{4}{3+2a}$，∴ $a=\frac{3}{2}$，经检验，$a=\frac{3}{2}$是分式方程的解，∴ 扩张后的矩形长为 $3+2a=3+2\times\frac{3}{2}=6$(cm)，∴ 扩张后矩形的周长为 2×(4+6) = 20(cm)，20−10 = 10(cm)，∴ 这根铁丝需增加 10 cm，故选 D.

7. (−4，−6)　【解析】∵ 矩形 $OABC$ 与矩形 $ODEF$ 相似，且它们的相似比为 3∶2，∴ $\frac{OA}{OD}=\frac{OC}{OF}=\frac{3}{2}$. ∵ 点 B 的坐标为 (9，6)，∴ $OA=9$，$OC=6$，∴ $\frac{9}{OD}=\frac{6}{OF}=\frac{3}{2}$，∴ $OD=6$，$OF=4$，∴ 点 E 的坐标为 (−4，−6).

思路分析　利用相似多边形的性质求出矩形 $ODEF$ 的边长，再根据点 E 所在的象限写出坐标即可.

8.【解】(1) 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=72°$，$\angle B=$

$135°$, $\angle C=95°$, 则 $\angle D=360°-72°-135°-95°=58°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 与 四边形 $EFGH$ 相似, $\therefore \angle H=\angle D=58°$.

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $EFGH$ 相似, $\therefore \frac{AB}{EF}=\frac{CD}{HG}$, 即 $\frac{5}{4}=\frac{15}{HG}$, 解得 $HG=12$, 即 HG 的长为 12.

27.2 相似三角形

27.2.1 相似三角形的判定

课时 1 相似三角形及平行线分线段成比例

刷基础

1. C 【解析】$\because \angle A=80°$, $\angle ADB=70°$, $\therefore \angle ABD=180°-\angle A-\angle ADB=30°$. $\because \triangle ABD\backsim\triangle ACB$, $\therefore \angle ADB=\angle ABC=70°$, $\therefore \angle DBC=\angle ABC-\angle ABD=70°-30°=40°$, 故选 C.

2. $2+\sqrt{10}$ 【解析】$\because \triangle ABC\backsim\triangle DEF$, $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $\sqrt{2}$, x, y $(\sqrt{2}<x<y)$, $\triangle DEF$ 的三边长分别为 $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{15}$, $\therefore \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{x}{\sqrt{6}}=\frac{y}{\sqrt{15}}$, $\therefore x=2$, $y=\sqrt{10}$, $\therefore x+y=2+\sqrt{10}$. 故答案为 $2+\sqrt{10}$.

3. 4 或 9 【解析】$\because CD\perp AB$, $\therefore \angle ADC=\angle CDB=90°$. $\because \triangle ADC$ 与 $\triangle CDB$ 相似, $\therefore \triangle ADC\backsim\triangle CDB$ 或 $\triangle ADC\backsim\triangle BDC$, $\therefore \frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$ 或 $\frac{AD}{BD}=\frac{CD}{CD}$. $\because AD=9$, $CD=6$, $\therefore \frac{9}{6}=\frac{6}{BD}$ 或 $\frac{9}{BD}=\frac{6}{6}$, $\therefore BD=4$ 或 9. 故答案为 4 或 9.

易错警示

若题中给出的相似三角形未用相似符号"$\backsim$"连接，则要注意分类讨论，避免漏解.

4. C 【解析】设 P 点表示的数为 x, 则根据平行线分线段成比例可得 $\frac{x}{10-x}=\frac{1}{4-2}$, 解得 $x=\frac{10}{3}$, 经检验, $x=\frac{10}{3}$ 是分式方程的解且符合题意, 即 P 点表示的数为 $\frac{10}{3}$. 故选 C.

5. D 【解析】

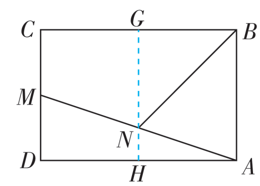
A	由同位角相等可得平行线, $\therefore \frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, 则 $mq=pn$, 故 A 不符合题意
B	由同位角相等可得平行线, $\therefore \frac{m}{p}=\frac{n}{q}$, 则 $mq=pn$, 故 B 不符合题意
C	由内错角相等可得平行线, $\therefore \frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, 则 $mq=pn$, 故 C 不符合题意
D	由内错角相等可得平行线, $\therefore \frac{m}{q}=\frac{p}{n}$, 则 $mn=pq$, 故 D 符合题意

6. 3 【解析】$\because E$ 是 AD 的中点, $\therefore DE=\frac{1}{2}DA$. $\because EM/\!/AB$, $\therefore \frac{DM}{DB}=\frac{DE}{DA}=\frac{1}{2}$, 即 $DM=\frac{1}{2}DB$. $\because EN/\!/AC$, $\therefore \frac{DN}{DC}=\frac{DE}{DA}=\frac{1}{2}$, 即 $DN=\frac{1}{2}DC$. $\because BC=6$, $\therefore MN=DM+DN=\frac{1}{2}DB+\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}BC=3$, 故答案为 3.

思路分析

过点 N 作 $GH/\!/AB$, 交 BC 于点 G, 交 AD 于点 H, 所以 $GH/\!/CD/\!/AB$, 由平行线分线段成比例可得 G, H 分别是 BC, AD 的中点, 进而可求得 GB, GN 的长度, 最后利用勾股定理求解即可.

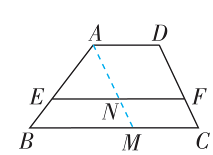
7. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 【解析】过点 N 作 $GH/\!/AB$, 交 BC 于点 G, 交 AD 于点 H, 如图.



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AB=CD=2$, $AD=BC=3$, $\angle C=\angle ABG=90°$, $AB/\!/CD$, $\angle BGH=\angle GHA=\angle CGH=\angle DHG=90°$, $\therefore$ 四边形 $CDHG$, 四边形 $GHAB$ 均为矩形, $\therefore GH=CD=AB=2$, $GH/\!/CD/\!/AB$, $\therefore \frac{CG}{GB}=\frac{MN}{AN}=\frac{DH}{HA}$. $\because N$ 为 AM 中点, $\therefore MN=AN$, $\therefore DH=HA$, $CG=GB=\frac{1}{2}BC=\frac{3}{2}$, $\therefore H$ 为 DA 的中点, $\therefore NH$ 为 $\triangle AMD$ 的中位线, $\therefore NH=\frac{1}{2}MD$. $\because M$ 是 CD 的中点, $\therefore MD=\frac{1}{2}CD=1$, $\therefore NH=\frac{1}{2}$, $\therefore GN=GH-NH=\frac{3}{2}$. 在 Rt $\triangle BGN$ 中, 由勾股定理得, $BN=\sqrt{BG^2+GN^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 故答案为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

8. $2:1:3$ 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AQ=CQ$, $AB/\!/CD$, $AB=CD$, $\therefore \triangle APM\backsim\triangle CPD$, $\therefore AP:PC=AM:CD$. $\because M$ 为 AB 的中点, $\therefore AM:CD=AM:AB=1:2$, $\therefore AP:PC=1:2$, $\therefore AP:AC=1:3$. $\because AQ:AC=QC:AC=1:2$, $\therefore PQ:AC=1:6$, $\therefore AP:PQ:QC=\frac{1}{3}AC:\frac{1}{6}AC:\frac{1}{2}AC=2:1:3$. 故答案为 $2:1:3$.

9. 5 【解析】如图, 作 $AM/\!/CD$ 交 BC 于 M, 交 EF 于 N. $\because AD/\!/EF/\!/BC$, $\therefore$ 四边形 $ADCM$ 是平行四边形, 四边形 $ADFN$ 是平行四边形, $\therefore AD=NF=CM=2$. $\because EF=4$, $\therefore EN=EF-FN=4-2=2$. $\because EN/\!/$

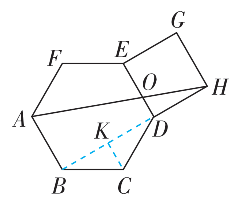


BM，$\therefore \triangle AEN \backsim \triangle ABM$，$\therefore \dfrac{EN}{BM}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore \dfrac{2}{BM}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore BM=3$，$\therefore BC=BM+CM=3+2=5$. 故答案为 5.

刷提升

1. A 【解析】$\because MN/\!/AD$，$AD/\!/BC$，$\therefore MN/\!/AD/\!/BC$，$\therefore \triangle CON \backsim \triangle CAD$，$\triangle DON \backsim \triangle DBC$，$\therefore \dfrac{ON}{AD}=\dfrac{CN}{CD}$，① $\dfrac{ON}{BC}=\dfrac{DN}{DC}$，② ①+②得 $\dfrac{ON}{AD}+\dfrac{ON}{BC}=\dfrac{CN}{CD}+\dfrac{DN}{CD}=1$，即 $\dfrac{ON}{3}+\dfrac{ON}{5}=1$，$\therefore ON=\dfrac{15}{8}$ cm.

2. B 【解析】连接 BD，如图所示. 由正六边形和正方形的性质得 B,D,H 三点共线. 设正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 a，则 $BC=CD=DE=DH=a$. $\because$ 在 $\triangle BCD$ 中，$BC=CD=a$，$\angle BCD=120°$，$\therefore \angle BDC=30°$. 过点 C 作 $CK\perp BD$，则易得 $DK=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$\therefore BD=\sqrt{3}a$.

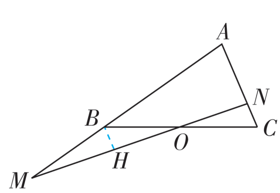


$\because OD/\!/AB$，$\therefore \dfrac{OA}{OH}=\dfrac{BD}{DH}=\dfrac{\sqrt{3}a}{a}=\sqrt{3}$，故选 B.

▶思路分析　连接 BD，易得 B,D,H 三点共线，设正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 a，求出等腰三角形 BCD 的底边 BD 的长，然后利用平行线分线段成比例的性质即可求出 $\dfrac{OA}{OH}$ 的值.

3. (1) $1-m$　$n-1$　(2) 2　【解析】(1) $\because AB=AM-BM$，$AC=AN+CN$，$\dfrac{AB}{AM}=m$，$\dfrac{AC}{AN}=n$，$\therefore \dfrac{AB}{AM}=\dfrac{AM-BM}{AM}=1-\dfrac{BM}{AM}=m$，$\dfrac{AC}{AN}=\dfrac{AN+CN}{AN}=1+\dfrac{CN}{AN}=n$，$\therefore \dfrac{BM}{AM}=1-m$，$\dfrac{CN}{AN}=n-1$. 故答案为 $1-m$，$n-1$.

(2) 设 $AM=a$，$AN=b$. $\because \dfrac{AB}{AM}=m$，$\dfrac{AC}{AN}=n$，$\therefore AB=am$，$AC=bn$，$\therefore MB=MA-AB=a-am=(1-m)a$，$CN=AC-AN=bn-b=(n-1)b$. $\because O$ 是线段 BC 的中点，$\therefore OB=OC$. 如图，过点 B 作 $BH/\!/AC$ 交 MN 于 H，$\therefore \angle OBH=\angle OCN$.



在 $\triangle OBH$ 与 $\triangle OCN$ 中，$\begin{cases}\angle OBH=\angle OCN,\\ OB=OC,\\ \angle BOH=\angle CON,\end{cases}$

$\therefore \triangle OBH \cong \triangle OCN$ (ASA)，$\therefore BH=CN=(n-1)b$. $\because BH/\!/AN$，$\therefore \triangle MBH \backsim \triangle MAN$，$\therefore \dfrac{BM}{AM}=\dfrac{BH}{AN}$，即 $\dfrac{(1-m)a}{a}=\dfrac{(n-1)b}{b}$，$\therefore 1-m=n-1$，$\therefore m+n=2$. 故答案为 2.

▶关键点拨　(2) 作平行线构造全等三角形及相似三角形，利用其性质求解.

4. 【解】(1) $\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=8$ cm，$BC=6$ cm，$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10$ cm.

$\because PE/\!/BC$，$\therefore \triangle APE \backsim \triangle ABC$，$\therefore \dfrac{AP}{AB}=\dfrac{PE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$，$\therefore \dfrac{10-2t}{10}=\dfrac{PE}{6}=\dfrac{AE}{8}$，$\therefore PE=\dfrac{3}{5}(10-2t)$，$AE=\dfrac{4}{5}(10-2t)$. 当 $PE=CF$ 时，易知四边形 $PFCE$ 是矩形，$\therefore t=\dfrac{3}{5}(10-2t)$，解得 $t=\dfrac{30}{11}$. 即当 $t=\dfrac{30}{11}$ 时，四边形 $PFCE$ 是矩形.

(2) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AC=\dfrac{1}{2}\times 6\times 8=24\,(\mathrm{cm}^2)$.

由 (1) 知 $PE=\dfrac{3}{5}(10-2t)$，$AE=\dfrac{4}{5}(10-2t)$，

$\therefore EC=8-\dfrac{4}{5}(10-2t)$，

$\therefore S_{\triangle PEF}=\dfrac{1}{2}PE\cdot EC=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}(10-2t)\times\left[8-\dfrac{4}{5}(10-2t)\right]=\dfrac{24}{5}t-\dfrac{24}{25}t^2$，$\therefore 24=5\times\left(\dfrac{24}{5}t-\dfrac{24}{25}t^2\right)$，解得 $t=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ 或 $\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$. 即当 $\triangle ABC$ 的面积是 $\triangle PEF$ 面积的 5 倍时，t 的值为 $\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

刷素养

5. (1)【证明】过 C 作 $CE/\!/DA$，交 BA 的延长线于 E. $\because CE/\!/AD$，$\therefore \dfrac{BD}{CD}=\dfrac{BA}{EA}$，$\angle 2=\angle ACE$，$\angle 1=\angle E$. $\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle ACE=\angle E$，$\therefore AE=AC$，$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{CD}$.

(2)【解】$\because AB=3$，$BC=4$，$\angle ABC=90°$，$\therefore AC=5$. $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BD}$，即 $\dfrac{5}{3}=\dfrac{CD}{BD}$，$\therefore BD=\dfrac{3}{8}BC=\dfrac{3}{2}$，$\therefore AD=\sqrt{BD^2+AB^2}=\sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+3^2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$，$\therefore \triangle ABD$ 的周长为 $\dfrac{3}{2}+3+\dfrac{3\sqrt{5}}{2}=\dfrac{9+3\sqrt{5}}{2}$. 故答案为 $\dfrac{9+3\sqrt{5}}{2}$.

课时 2　三边关系、边角关系判定三角形相似

刷基础

1. B　【解析】设网格中每个小正方形的边长为 1. 三角形①的三边长为$\sqrt{2}$，2，$\sqrt{10}$；三角形②的三边长为$\sqrt{2}$，$\sqrt{5}$，3；三角形③的三边长为 2，$2\sqrt{2}$，$2\sqrt{5}$；三角形④的三边长为$\sqrt{2}$，3，$\sqrt{17}$. $\because \frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$ ①与③相似.

刷有所得｜网格中相似三角形的判定步骤

利用三边判断两个三角形是否相似的步骤："一排二算三判".

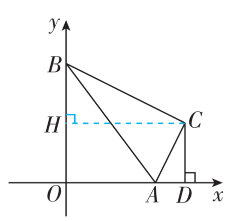
(1)排：将三角形的三边按长短顺序排列；

(2)算：分别计算它们对应边(长边对长边，短边对短边)的比值；

(3)判：根据比值是否相等来判断两个三角形是否相似.

2. ②　【解析】以"帅""相""兵"所在位置的格点为顶点的三角形的三边的长分别为 2，$2\sqrt{5}$，$4\sqrt{2}$；"车"与"炮"之间的距离为 1，"炮"与②之间的距离为$\sqrt{5}$，"车"与②之间的距离为$2\sqrt{2}$. $\because \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，$\therefore$ 以②与"车""炮"所在位置的格点为顶点的三角形与以"帅""相""兵"所在位置的格点为顶点的三角形相似，$\therefore$ "马"应该落在②的位置.

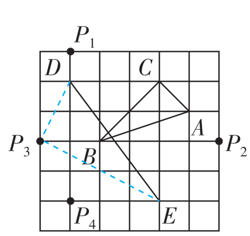
3. 【证明】如图，过点 C 作 $CH\perp OB$，交 OB 于点 H. 由 A,B,C 三点的坐标可以得到 $OA=3$，$OB=4$，$AD=1$，$CD=2$，$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$OH=CD=2$，$OD=OA+AD=4$，$\therefore BH=OB-OH=2$，$CH=4$，$\therefore BC=\sqrt{BH^2+CH^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.



在$\triangle ABC$和$\triangle ACD$中，$\because \frac{AC}{AD}=\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}$，$\frac{BC}{CD}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$，$\frac{AB}{AC}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，$\therefore \frac{AC}{AD}=\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{AC}$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ACD$.

4. C　【解析】由题意可得 $AC=\sqrt{2}$，$BC=2\sqrt{2}$，$BA=\sqrt{10}$，$\therefore AC^2+BC^2=BA^2$，$BC=2AC$，$\therefore \angle ACB=90°$. 如图，



连接 DP_3，EP_3. 由勾股定理可得 $DP_3=\sqrt{5}$，$EP_3=2\sqrt{5}$，$DE=5$，$\therefore DP_3^2+EP_3^2=DE^2$，$EP_3=2DP_3$，$\therefore \angle DP_3E=90°$，$\frac{BC}{AC}=\frac{EP_3}{DP_3}=2$，即$\frac{BC}{EP_3}=\frac{AC}{DP_3}$，$\therefore \triangle ACB\backsim\triangle DP_3E$，$\therefore$ 点 P_3 符合条件. 由计算可知点 P_1，P_2，P_4 均不符合条件. 故选 C.

关键点拨　判断出$\triangle ABC$是直角三角形，且 $BC=2AC$，进而可得结论.

5. B　【解析】$\because OA:OC=OB:OD$，$\angle AOB=\angle COD$，$\therefore \triangle OAB\backsim\triangle OCD$，即甲、丙相似；根据已知条件可知$\triangle OBC$与$\triangle OAD$不相似，即乙、丁不相似.

6. (1)【证明】$\because \angle 1=\angle 2$，$\therefore \angle 1+\angle ACD=\angle 2+\angle ACD$，$\therefore \angle ACB=\angle AED$.

又$\because \frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ADE$.

(2)【解】$\because \triangle ABC\backsim\triangle ADE$，$\therefore \frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$.

$\because AD=4$，$AB=6$，$AC=5$，$\therefore AE=\frac{AD\cdot AC}{AB}=\frac{4\times5}{6}=\frac{10}{3}$，$\therefore AE$ 的长是$\frac{10}{3}$.

刷易错

易错警示　表述相似时，若利用相似符号"∽"表示，则相似三角形的对应边、对应角是确定的；但是用文字表述时，对应边、对应角不确定，注意分类讨论.

7. 2 或 8 或 5　【解析】$\because \angle D=\angle C$，$\therefore$ 分以下情况：①当$\frac{AD}{PC}=\frac{PD}{BC}$时，$\triangle APD\backsim\triangle PBC$，即$\frac{4}{10-PD}=\frac{PD}{4}$，解得 $PD=2$ 或 $PD=8$；②当$\frac{AD}{BC}=\frac{PD}{PC}$时，$\triangle PAD\backsim\triangle PBC$，即$\frac{4}{4}=\frac{PD}{10-PD}$，解得 $DP=5$. 综上所述，DP 的长度是 2 或 8 或 5. 故答案是 2 或 8 或 5.

刷提升

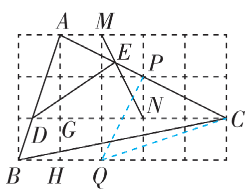
1. B　【解析】在三角形纸片 ABC 中，$AB=9$，$AC=6$，$BC=12$. A 选项，因为$\frac{6}{BC}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，对应边$\frac{AB}{BC}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}\neq\frac{1}{2}$，所以沿虚线剪下的阴影部分的三角形与$\triangle ABC$不相似，故此选项错误；B 选项，因为$\frac{4}{AC}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，对应边$\frac{AC}{AB}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$，$\angle A=\angle A$，所以沿虚线剪下的阴影部分的三角形与$\triangle ABC$相似，故此选项正确；C 选项，因为$\frac{4}{AB}=\frac{4}{9}$，对应边$\frac{AB}{BC}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}\neq\frac{4}{9}$，所以沿虚线剪下的阴影部分的三角形与$\triangle ABC$不相似，故此选项错误；D 选项，因为$\frac{4}{AC}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，对应边$\frac{AC}{BC}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\neq\frac{2}{3}$，所以沿

虚线剪下的阴影部分的三角形与$\triangle ABC$不相似，故此选项错误. 故选 B.

2. B 【解析】设 $BP=x$，则 $PD=BD-BP=10-x$. $\because AB\perp BD$，$CD\perp BD$，$\therefore \angle B=\angle D=90°$，$\therefore$ 当 $\frac{AB}{CD}=\frac{BP}{PD}$ 或 $\frac{AB}{PD}=\frac{BP}{CD}$ 时，$\triangle PAB$ 和 $\triangle PCD$ 相似. 当 $\frac{AB}{CD}=\frac{BP}{PD}$ 时，$\frac{4}{6}=\frac{x}{10-x}$，解得 $x=4$. 当 $\frac{AB}{PD}=\frac{BP}{CD}$ 时，$\frac{4}{10-x}=\frac{x}{6}$，解得 $x=4$ 或 $x=6$，$\therefore BP=4$ 或 6，$\therefore$ 满足条件的点 P 有 2 个.

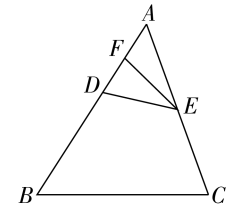
▶思路分析 分两种情况讨论，当 $\frac{AB}{CD}=\frac{BP}{PD}$ 或 $\frac{AB}{PD}=\frac{BP}{CD}$ 时，$\triangle PAB$ 和 $\triangle PCD$ 相似，列出方程求解即可.

3. ①②③ 【解析】由勾股定理得 $AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，$MN=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\therefore \frac{AB}{MN}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}$，$\therefore AB=\sqrt{2}MN$，故①正确. $\because AM/\!/CN$，$\therefore \triangle AEM\backsim\triangle CEN$，$\therefore \frac{AE}{CE}=\frac{AM}{CN}=\frac{1}{2}$，$\therefore CE=2AE$，故②正确. 如图，取格点 G，H，则 $AG=2$，$AH=3$. $\because DG/\!/BH$，$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle ABH$，$\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AG}{AH}=\frac{2}{3}$，$\therefore AD=\frac{2}{3}AB=\frac{2\sqrt{10}}{3}$. $\because \frac{AE}{CE}=\frac{1}{2}$，$\therefore AE=\frac{1}{1+2}AC=\frac{1}{3}AC$. $\because AC=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，$\therefore AE=\frac{2\sqrt{5}}{3}$，$\frac{AD}{AC}=\frac{\frac{2\sqrt{10}}{3}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{3}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}$. 又 $\because \angle EAD=\angle BAC$，$\therefore \triangle EAD\backsim\triangle BAC$，$\therefore \angle ADE=\angle ACB$，故③正确. 取格点 P，Q，连接 PQ，CQ，则 $PQ^2=PC^2=1^2+2^2=5$，$\therefore PQ^2+PC^2=5+5=10$. $\because CQ^2=1^2+3^2=10$，$\therefore PQ^2+PC^2=CQ^2$，$\therefore \triangle PCQ$ 是等腰直角三角形，且 $\angle CPQ=90°$，$\therefore \angle ACQ=\angle PQC=45°$. $\because \angle ACB\neq\angle ACQ$，$\therefore \angle ACB\neq 45°$，故④错误，故答案为①②③.



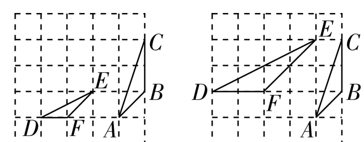
4. 【证明】(1) $\because AE=EC$，$\therefore AC=2AE$. $\because AE^2=\frac{1}{2}AD\cdot AB$，$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{2AE}$，$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}$. 又 $\because \angle A=\angle A$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ACB$.

(2) 如图. 由题意得 $AF=DF=\frac{1}{2}AD$. $\because AE^2=\frac{1}{2}AD\cdot AB$，$\therefore AE^2=AF\cdot AB$，$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AE}$. 又 $\because \angle A=\angle A$，$\therefore \triangle AFE\backsim\triangle AEB$，$\therefore \angle AEF=\angle ABE$. $\because \triangle ADE\backsim\triangle ACB$，$\therefore \angle AED=\angle ABC$，$\therefore \angle AED-\angle AEF=\angle ABC-\angle ABE$，$\therefore \angle DEF=\angle CBE$.



关键点拨 (1) 根据 $AE=EC$ 将 $AE^2=\frac{1}{2}AD\cdot AB$ 变形为 $\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}$ 是解题关键.
▶(2) 结合 F 是 AD 的中点将 $AE^2=\frac{1}{2}AD\cdot AB$ 变形为 $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AE}$ 是解题关键.

5. 【解】如图(1)和图(2)所示，$\triangle DEF$ 即为所求. 由网格的特点和勾股定理可得 $AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$BC=2$，$AC=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$. 图(1)中，$EF=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$DF=1$，$DE=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\therefore \frac{AB}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{AC}{DE}=\sqrt{2}$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DFE$. 同理可证明图(2)中 $\triangle ABC\backsim\triangle DFE$.



图(1)　　图(2)

刷素养

关键点拨◀ (1) 注意分 $OA=AM$，$OA=OM$，$MA=OM$ 三种情况讨论.

6. 【解】(1) 设 $A(x,y)$，则由题意可得 $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$. ①

当 $OA=AM$ 时，$OA^2=AM^2$，

即 $x^2+y^2=(13-x)^2+y^2$. ②

由①②得 $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x, \\ x^2+y^2=(13-x)^2+y^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{13}{2}, \\ y=\frac{39}{4}. \end{cases}$

即 $A\left(\frac{13}{2},\frac{39}{4}\right)$.

当 $OA=OM$ 时，$OA^2=OM^2$，即 $x^2+y^2=169$. ③

由①③得 $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x, \\ x^2+y^2=169, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=2\sqrt{13}, \\ y=3\sqrt{13} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-2\sqrt{13}, \\ y=-3\sqrt{13}. \end{cases}$

$\because$ 点 A 在第一象限，$\therefore A(2\sqrt{13},3\sqrt{13})$.

当 $MA=OM$ 时，$MA^2=OM^2$，即 $(13-x)^2+y^2=169$. ④

由①④得 $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x, \\ (13-x)^2+y^2=169, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=8, \\ y=12 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$ $\because$ 点 A 在第一象限，$\therefore A(8,12)$.

综上所述，如果 $\triangle AOM$ 是等腰三角形，那么点 A 的坐标是 $\left(\frac{13}{2},\frac{39}{4}\right)$ 或 $(2\sqrt{13},3\sqrt{13})$ 或 $(8,12)$.

(2)存在点 A 使 $\triangle OMN$ 与 $\triangle AOB$ 相似. 点 A 的坐标为 $(4,6)$ 或 $\left(\frac{13}{2},\frac{39}{4}\right)$. $\because\ \angle MON=\angle ABO=90°$,$\therefore$ 分以下情况:

当 $\frac{AB}{NO}=\frac{OB}{MO}$ 时,$\triangle OBA\backsim\triangle MON$,故 $\frac{ON}{OM}=\frac{AB}{OB}=\frac{3}{2}$,则 $ON=\frac{3}{2}OM=\frac{39}{2}$,$\therefore N\left(0,\frac{39}{2}\right)$.

$\therefore$ 直线 MN 的解析式为 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{39}{2}$. ⑤

由①⑤得 $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x, \\ y=-\frac{3}{2}x+\frac{39}{2}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{13}{2}, \\ y=\frac{39}{4}, \end{cases}$

$\therefore A\left(\frac{13}{2},\frac{39}{4}\right)$.

当 $\frac{AB}{MO}=\frac{OB}{NO}$ 时,$\triangle OAB\backsim\triangle NMO$,故 $\frac{OM}{ON}=\frac{AB}{OB}$,则 $ON=\frac{OB}{AB}\cdot OM=\frac{2}{3}\times 13=\frac{26}{3}$,$\therefore N\left(0,\frac{26}{3}\right)$.

$\therefore$ 直线 MN 的解析式为 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{26}{3}$. ⑥

由①⑥得 $\begin{cases} y=\frac{3}{2}x, \\ y=-\frac{2}{3}x+\frac{26}{3}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=6, \end{cases}$ $\therefore A(4,6)$.

综上所述,当点 A 的坐标为 $(4,6)$ 或 $\left(\frac{13}{2},\frac{39}{4}\right)$ 时,$\triangle OMN$ 与 $\triangle AOB$ 相似.

课时 3 两角相等判定三角形相似

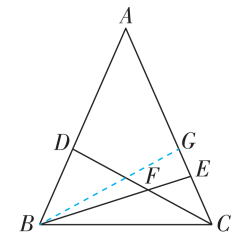
刷基础

1. C 【解析】$\because\ AB\parallel CD$,$AB=2$,$CD=6$,$\therefore\ \triangle AOB\backsim\triangle DOC$,$\therefore\ \frac{BO}{CO}=\frac{AB}{CD}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,$\therefore\ CO=3BO$,$\therefore\ CB=BO+3BO=4BO$. $\because\ \angle ACB=\angle BAD$,$\angle B=\angle B$,$\therefore\ \triangle ACB\backsim\triangle OAB$,$\therefore\ \frac{CB}{AB}=\frac{AB}{BO}$,$\therefore\ CB\cdot BO=AB^2=2^2=4$,$\therefore\ 4BO^2=4$,解得 $BO=1$ 或 $BO=-1$(不符合题意,舍去),$\therefore\ CO=3$,故选 C.

2. C 【解析】$\because\ AC=BC$,$\angle C=36°$,$\therefore\ \angle B=\angle BAC=72°$. $\because\ AD$ 平分 $\angle BAC$,$\therefore\ \angle BAD=\angle CAD=36°$,$\therefore\ \angle BAD=\angle C=\angle CAD=36°$,$\therefore\ AD=CD$,$\angle ADB=72°$,$\therefore\ AB=AD$,$\therefore\ AB=AD=CD$. $\because\ \angle BAD=\angle C=36°$,$\angle ABD=\angle CBA$,$\therefore\ \triangle ABD\backsim\triangle CBA$,$\therefore\ \frac{BD}{AB}=\frac{AD}{AC}$. 设 $BC=AC=a$,$BD=x$,则 $AD=CD=AB=a-x$,$\therefore\ \frac{x}{a-x}=\frac{a-x}{a}$,解得 $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}a$(不符合题意,舍去)或 $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a$,$\therefore\ AB=a-x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$,$\therefore\ \frac{AB}{BC}=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 故选 C.

思路分析 利用两角相等判定 $\triangle ABD\backsim\triangle CBA$,得出 $\frac{BD}{AB}=\frac{AD}{AC}$,设未知数列方程求解即可得出 $\frac{AB}{BC}$ 的值.

3.【解】与 $\triangle ABE$ 相似的三角形是 $\triangle FBD$. 证明:如图,在 AC 上截取 $CG=BD$,连接 BG. $\because\ AB=AC$,$\therefore\ \angle DBC=\angle GCB$. 又 $\because\ BC=CB$,$\therefore\ \triangle DBC\cong\triangle GCB$(SAS),$\therefore\ BG=CD$,$\angle BDF=\angle BGE$. $\because\ CD=BE$,$\therefore\ BG=BE$,$\therefore\ \angle BGE=\angle BEG$,$\therefore\ \angle BDF=\angle BEA$. 又 $\because\ \angle DBF=\angle ABE$,$\therefore\ \triangle ABE\backsim\triangle FBD$,$\therefore$ 图中与 $\triangle ABE$ 相似的三角形是 $\triangle FBD$.

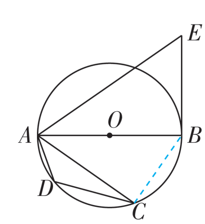


4.【证明】$\because\ EF$ 垂直平分线段 OA,$\therefore\ FA=FO$,$\therefore\ \angle FAO=\angle FOA$. $\because\ OD=OB$,$\therefore\ \angle DBO=\angle ODB$. $\because\ \angle DBO=\frac{1}{2}\angle AOD=\angle FOA$,$\therefore\ \angle FAO=\angle FOA=\angle DBO=\angle ODB$,$\therefore\ \triangle AFO\backsim\triangle BOD$.

思路分析 先证明三角形是直角三角形,再利用短直角边与长直角边的比逐一判断,即可得到答案.

5. B 【解析】设每个小正方形的边长为 1. 由题意可知,$\angle BAC=90°$,$AB:AC=1:2$. A 选项,$\because$ 三条边长分别为 $2\sqrt{2}$,$2\sqrt{5}$,$2\sqrt{5}$,$(2\sqrt{5})^2+(2\sqrt{2})^2\neq(2\sqrt{5})^2$,$\therefore$ 此三角形不是直角三角形,不符合题意;B 选项,$\because$ 三条边长分别为 $\sqrt{2}$,$2\sqrt{2}$,$\sqrt{10}$,$(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2=(\sqrt{10})^2$,$\therefore$ 此三角形为直角三角形,且短直角边与长直角边之比为 $1:2$,故此三角形与 $\triangle ABC$ 相似,符合题意;C 选项,$\because$ 三条边长分别为 2,3,$\sqrt{13}$,$2^2+3^2=(\sqrt{13})^2$,$\therefore$ 此三角形为直角三角形,但短直角边与长直角边之比为 $2:3$,不符合题意;D 选项,$\because$ 三条边长分别为 $\sqrt{5}$,$\sqrt{5}$,$\sqrt{10}$,$(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2=(\sqrt{10})^2$,$\therefore$ 此三角形为直角三角形,但两直角边之比为 $1:1$,不符合题意. 故选 B.

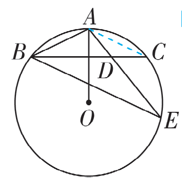
6. 55° 【解析】如图,连接 BC. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形,$\angle ADC=125°$,$\therefore\ \angle ABC=180°-125°=55°$. $\because\ AB$ 是 $\odot O$ 的直径,



∴ $\angle ACB=90°$. ∵ BE 是 $\odot O$ 的切线,∴ $\angle ABE=90°$. ∵ $AB^2=AE\cdot AC$,即 $\frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AC}$,∴ $Rt\triangle ABE\backsim Rt\triangle ACB$,∴ $\angle E=\angle ABC=55°$.

刷提升

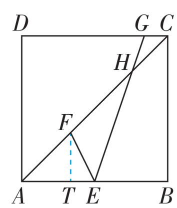
1. **B** 【解析】连接 AC,如图.



∵ OA 是 $\odot O$ 的半径,弦 $BC\perp OA$,∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$,∴ $\angle ABD=\angle C$. ∵ $\angle E=\angle C$,∴ $\angle ABD=\angle E$. ∵ $\angle DAB=\angle BAE$,∴ $\triangle DAB\backsim\triangle BAE$,∴ $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AB}$. ∵ $AD=1$,$ED=2$,∴ $AE=AD+ED=1+2=3$,∴ $AB^2=AD\cdot AE=1\times3=3$,∴ $AB=\sqrt{3}$ 或 $AB=-\sqrt{3}$(不符合题意,舍去),故选 B.

▶**关键点拨** 利用垂径定理及等弧、同弧所对的圆周角相等证得 $\angle ABD=\angle E$,进而证得 $\triangle DAB\backsim\triangle BAE$,从而得出 $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AB}$ 是解题关键.

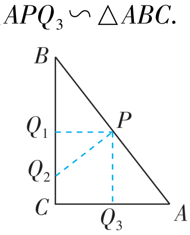
2. **C** 【解析】如图,过点 F 作 $FT\perp AB$ 于点 T.



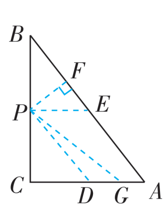
∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,∴ $\angle B=90°$,$AB=BC=12$,$\angle DAC=\angle BAC=45°$,∴ $AC=\sqrt{2}AB=12\sqrt{2}$. ∵ $\frac{AF}{AC}=\frac{1}{3}$,∴ $AF=4\sqrt{2}$. ∵ $FT\perp AB$,∴ $\angle FAT=\angle AFT=45°$,∴ $AT=FT=4$. ∵ $AE=EB=6$,∴ $ET=AE-AT=6-4=2$,∴ $EF=\sqrt{ET^2+FT^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. 设 $EH=x$,$FH=y$. ∵ $\angle EHF=\angle AHE$,$\angle HEF=\angle EAH=45°$,∴ $\triangle EHF\backsim\triangle AHE$,∴ $\frac{EF}{AE}=\frac{HE}{HA}=\frac{HF}{EH}$,∴ $\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{x}{y+4\sqrt{2}}=\frac{y}{x}$,解得 $x=3\sqrt{10}$,$y=5\sqrt{2}$,∴ $FH=5\sqrt{2}$,∴ $CH=AC-AF-FH=12\sqrt{2}-4\sqrt{2}-5\sqrt{2}=3\sqrt{2}$. 故选 C.

▶**思路分析** 过点 F 作 AB 的垂线. 根据勾股定理求出 EF 的长,设 $EH=x$,$FH=y$,证明 $\triangle EHF\backsim\triangle AHE$,利用相似三角形的性质,构建方程组解决问题.

3. **甲、丙** 【解析】当点 P 在斜边 AB 上时有三种不同的剪法:如图(1),过点 P 作 $PQ_1\perp BC$ 于 Q_1,则 $\triangle BPQ_1\backsim\triangle BAC$;过点 P 作 $PQ_2\perp AB$ 交 BC(或 AC)于 Q_2,则 $\triangle BPQ_2\backsim\triangle BCA$(或 $\triangle APQ_2\backsim\triangle ACB$);过点 P 作 $PQ_3\perp AC$ 于 Q_3,则 $\triangle APQ_3\backsim\triangle ABC$.



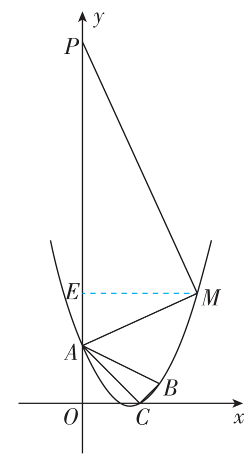
图(1)



图(2)

当点 P 在直角边 BC 上时有四种不同的剪法:如图(2)所示,过 P 作 $PD//AB$ 交 AC 于 D,则 $\triangle PCD\backsim\triangle BCA$;过 P 作 $PE//AC$ 交 AB 于 E,则 $\triangle BPE\backsim\triangle BCA$;过 P 作 $PF\perp AB$ 交 AB 于 F,则 $\triangle PBF\backsim\triangle ABC$;作 $\angle CPG=\angle A$ 交 AC 于点 G,则 $\triangle CPG\backsim\triangle CAB$. 同理可得点 P 在直角边 AC 上时有四种不同的剪法. 故甲正确,乙错误,丙正确. 故答案为甲、丙.

4. $\left(\frac{17}{3},\frac{44}{9}\right)$ 或 $(11,36)$ 【解析】如图,过点 M 作 $ME\perp AP$ 于 E. ∵ 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+c$ 过点 $B(4,1)$,∴ $1=8-10+c$,∴ $c=3$,∴ $A(0,3)$,抛物线解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3$. 当 $y=0$ 时,$0=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3$,∴ $x_1=2$,$x_2=3$,∴ $C(3,0)$. ∵ $A(0,3)$,$C(3,0)$,$B(4,1)$,∴ $AC=3\sqrt{2}$,$BC=\sqrt{2}$,$AB=2\sqrt{5}$,∴ $AC^2+BC^2=AB^2$,



∴ $\angle ACB=90°$. 设 $M\left(m,\frac{1}{2}m^2-\frac{5}{2}m+3\right)$,∴ $ME=m$,$AE=\frac{1}{2}m^2-\frac{5}{2}m+3-3=\frac{1}{2}m^2-\frac{5}{2}m$.

当 $\angle AMP=\angle ACB=90°$,$\angle ABC=\angle PAM$ 时,$\triangle ACB\backsim\triangle PMA$,∴ $\frac{AC}{BC}=\frac{MP}{AM}=\tan\angle PAM=\frac{EM}{AE}$,∴ $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{m}{\frac{1}{2}m^2-\frac{5}{2}m}$,∴ $m=\frac{17}{3}$,∴ $M\left(\frac{17}{3},\frac{44}{9}\right)$;

当 $\angle AMP=\angle ACB=90°$,$\angle BAC=\angle PAM$ 时,$\triangle ACB\backsim\triangle AMP$,∴ $\frac{BC}{AC}=\frac{PM}{AM}=\tan\angle PAM=\frac{EM}{AE}$,∴ $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{m}{\frac{1}{2}m^2-\frac{5}{2}m}$,∴ $m=11$,∴ $M(11,36)$,

故点 M 坐标为 $\left(\frac{17}{3},\frac{44}{9}\right)$ 或 $(11,36)$.

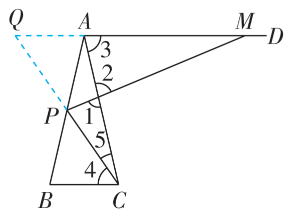
刷素养

5. 【解】(1)由作图步骤可得 AD 为 $\angle GAC$ 的平分线,∴ $\angle CAD=\angle GAD$,故答案为 $\angle CAD=\angle GAD$.

(2)① $AD//BC$. 理由如下:∵ $AB=AC$,∴ $\angle B=\angle C$,∴ $\angle GAC=\angle B+\angle C=2\angle C$. ∵ $\angle GAC=\angle CAD+\angle GAD=2\angle CAD$,∴ $\angle C=\angle DAC$,∴ $AD//BC$.

②由①可知，$\angle GAD=\angle B=\angle C$. $\because AD=GD$，$\therefore \angle GAD=\angle AGD$，$\therefore \angle GAD=\angle AGD=\angle B=\angle C$，$\therefore \triangle ADG\backsim\triangle BAC$，$\therefore \dfrac{AD}{BA}=\dfrac{AG}{BC}$，即$\dfrac{DA}{GA}=\dfrac{AB}{BC}$.
$\because AB=6, BC=2$，$\therefore \dfrac{AD}{AG}=\dfrac{6}{2}=3$，故答案为 3.

(3) 如图所示，延长 CP 交 MA 的延长线于点 Q. $\because AM/\!/BC$，$\therefore \angle 3=\angle 4+\angle 5$. $\because \angle B=\angle 4+\angle 5$，



$\therefore \angle 3=\angle B$. $\because \angle CPM=\angle B$，$\therefore \angle CPM=\angle 3$. 又$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 2+\angle 3+\angle AMP=180°$，$\angle 1+\angle CPM+\angle 5=180°$，$\therefore \angle AMP=\angle 5$. $\because AQ/\!/BC$，$\therefore \angle Q=\angle 4$，$\angle PAQ=\angle B$. 又$\because P$ 为 AB 的中点，$\therefore AP=PB$，$\therefore \triangle PAQ\cong\triangle PBC$(AAS)，$\therefore AQ=BC=2$. 又$\because \angle APC=\angle B+\angle 4=\angle APM+\angle CPM$，$\angle B=\angle CPM$，$\therefore \angle 4=\angle APM$. 又$\because \angle Q=\angle 4$，$\therefore \angle APM=\angle Q$. 又$\because \angle AMP=\angle 5$，$\therefore \triangle APM\backsim\triangle AQC$，$\therefore \dfrac{AP}{AQ}=\dfrac{AM}{AC}$. $\because AQ=2, AP=3, AC=6$，$\therefore AM=\dfrac{AP\cdot AC}{AQ}=\dfrac{3\times 6}{2}=9$，$\therefore AM$ 的长为 9.

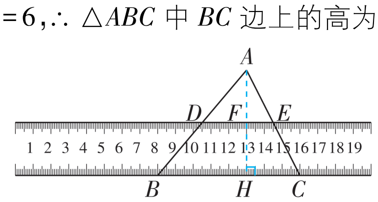
27.2.2 相似三角形的性质

刷基础

1. **B** 【解析】$\because$ 两个相似三角形对应边之比是 $2:3$，$\therefore$ 这两个相似三角形的相似比为 $2:3$，$\therefore$ 它们的对应角平分线之比为 $2:3$. 故选B.

2. 5.6 【解析】设较短的高为 x 厘米，则较长的高为 $(x+2.4)$ 厘米. 根据题意得 $x:(x+2.4)=2:5$，解得 $x=1.6$，所以 $x+2.4=4$，所以两条高的长度的和为 $1.6+4=5.6$(厘米)，故答案为 5.6.

3. 6 【解析】如图，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于 H，交 DE 于 F. $\because DE/\!/BC$，$AH\perp BC$，$\therefore AF\perp DE$. $\because$ 点 B,C,D,E 处的读数分别为 $8,16,10.5,14.5$，$\therefore BC=16-8=8$，$DE=14.5-10.5=4$. $\because DE/\!/BC$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AF}{AH}$. $\because$ 直尺的宽为 3，$\therefore FH=3$，$\therefore \dfrac{4}{8}=\dfrac{AH-3}{AH}$，$\therefore AH=6$，$\therefore \triangle ABC$ 中 BC 边上的高为 6.



归纳总结

相似三角形对应线段(对应中线、对应角平分线、对应边上的高)的比等于相似比.

归纳总结

(1) 相似三角形对应边之比等于相似比；
(2) 相似三角形对应高的比，对应中线的比与对应角平分线的比等于相似比；
(3) 相似三角形周长的比等于相似比；
(4) 相似三角形面积的比等于相似比的平方.

4. 【解】(1) 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{AC^2+CB^2}=\sqrt{9^2+12^2}=15$. $\because CM$ 是斜边 AB 上的中线，$\therefore CM=\dfrac{1}{2}AB=7.5$. $\because$ Rt$\triangle ABC\backsim$Rt$\triangle DFE$，$\therefore \dfrac{DE}{AC}=\dfrac{DF}{AB}$，即$\dfrac{3}{9}=\dfrac{DF}{15}$，$\therefore DF=5$. $\because EN$ 为斜边 DF 上的中线，$\therefore EN=\dfrac{1}{2}DF=2.5$.
(2) $\because \dfrac{CM}{EN}=\dfrac{7.5}{2.5}=\dfrac{3}{1}$，相似比为$\dfrac{AC}{DE}=\dfrac{9}{3}=\dfrac{3}{1}$，$\therefore \dfrac{CM}{EN}$的值等于相似比. 结论：相似三角形对应中线的比等于相似比.

5. **A** 【解析】$\because$ 两个相似三角形的对应角平分线的比为 $1:4$，$\therefore$ 两个相似三角形的相似比为 $1:4$，$\therefore$ 它们的周长比为 $1:4$. 故选 A.

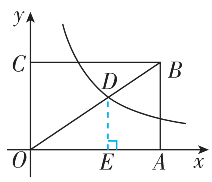
6. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】$\because \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{2}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，$\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{\sqrt{2^2+2^2}}{2}=\sqrt{2}$，$\dfrac{DF}{AC}=\dfrac{\sqrt{4^2+2^2}}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{DE}{AB}=\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{DF}{AC}=\sqrt{2}$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DEF$，$\therefore \dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故答案为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

7. (1)【证明】$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore \angle A=\angle B=\angle C=60°$，$\therefore \angle BDF=180°-\angle B-\angle BFD=120°-\angle BFD$. 由折叠的性质可得 $\angle DFE=\angle A=60°$，$\therefore \angle EFC=180°-\angle DFE-\angle BFD=120°-\angle BFD$，$\therefore \angle BDF=\angle EFC$. 又$\because \angle B=\angle C$，$\therefore \triangle BDF\backsim\triangle CFE$.
(2)【解】由(1)知 $\triangle BDF\backsim\triangle CFE$，$\therefore \dfrac{BF}{CE}=\dfrac{DF}{EF}=\dfrac{BD}{CF}$. 由折叠的性质可知，$AD=DF$，$AE=EF$. 设 $BF=a$，则 $AB=BC=AC=3a$，$CF=2a$，$\therefore BF+DF+BD=AB+BF=a+3a=4a$，$CE+EF+CF=AC+CF=3a+2a=5a$，$\therefore \dfrac{DF}{EF}=\dfrac{BF+DF+BD}{CE+EF+CF}=\dfrac{4}{5}$.

8. **B** 【解析】$\because \triangle ABC\backsim\triangle DEF$，$\therefore \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}}=\left(\dfrac{AC}{DF}\right)^2$. $\because AC=3$ cm，$DF=4$ cm，$\triangle DEF$ 的面积为 16 cm^2，$\therefore \dfrac{S_{\triangle ABC}}{16}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}$，$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 9 cm^2. 故选 B.

刷提升

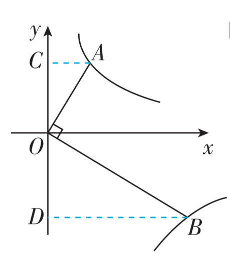
1. B 【解析】过点 D 作 $DE\perp OA$，垂足为 E，如图所示，则 $S_{\triangle ODE}=\frac{1}{2}\times9=\frac{9}{2}$. $\because DE\perp OA,AB\perp OA$，$\therefore DE/\!/AB$，$\therefore\triangle ODE\backsim\triangle OBA$，$\therefore\frac{S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle OBA}}=\left(\frac{OD}{OB}\right)^2=\frac{9}{25}$，$\therefore S_{\triangle OBA}=\frac{25}{2}$，$\therefore$ 矩形 $OABC$ 的面积为 $\frac{25}{2}\times2=25$，故选 B.



思路分析 过点 D 作 $DE\perp OA$，垂足为 E，根据反比例函数中 k 的几何意义得出 $\triangle ODE$ 的面积，再证 $\triangle ODE\backsim\triangle OBA$，得出 $\triangle OBA$ 的面积，从而得出矩形 $OABC$ 的面积.

2. A 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore AB=BC=CD=AD$，$\angle BCE=\angle D=90°$. 设 $AB=BC=CD=AD=a$. $\because E,F$ 分别是 CD,AD 的中点，$\therefore DF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}a$，$CE=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}a$，$\therefore CE=DF$. 在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CDF$ 中，$\begin{cases}BC=CD,\\ \angle BCE=\angle D=90°,\\ CE=DF,\end{cases}$ $\therefore\triangle BCE\cong\triangle CDF(\text{SAS})$，$\therefore\angle CBE=\angle DCF$. $\because\angle BEC=\angle CEG$，$\therefore\triangle BCE\backsim\triangle CGE$，$\therefore\frac{S_{\triangle CGE}}{S_{\triangle BCE}}=\left(\frac{CE}{BE}\right)^2=\frac{CE^2}{BE^2}=\frac{CE^2}{BC^2+CE^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{1}{5}$. $\because S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}BC\cdot CE=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{2}a=\frac{1}{4}a^2$，$\therefore S_{\triangle CGE}=\frac{1}{5}S_{\triangle BCE}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{20}a^2$，$\therefore S_{\triangle BCG}=S_{\triangle BCE}-S_{\triangle CGE}=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{20}a^2=\frac{1}{5}a^2$. $\because\triangle BCE\cong\triangle CDF$，$\therefore S_{\triangle CDF}=S_{\triangle BCE}=\frac{1}{4}a^2$，$\therefore S_{\triangle BCG}=S_{四边形DEGF}=\frac{1}{5}a^2$. $\because S_2=AB\cdot BC=a^2$，$\therefore S_1=S_2-S_{\triangle BCG}-S_{四边形DEGF}=a^2-\frac{1}{5}a^2-\frac{1}{5}a^2=\frac{3}{5}a^2$，$\therefore\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{3}{5}a^2}{a^2}=\frac{3}{5}$，故选 A.

3. 2 【解析】如图，作 $AC\perp y$ 轴于点 C，$BD\perp y$ 轴于点 D. $\because$ 点 A,B 分别在反比例函数 $y=\frac{1}{x}(x>0)$，$y=-\frac{4}{x}(x>0)$ 的图象上，



$\therefore S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$，$S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}\times|-4|=2$. $\because OA\perp OB$，$\therefore\angle AOB=90°$，$\therefore\angle AOC+\angle BOD=90°$. 又 $\because\angle ODB=90°$，$\therefore\angle BOD+\angle DBO=90°$，$\therefore\angle AOC=\angle DBO$. 又 $\because\angle ACO=\angle BDO=90°$，$\therefore\text{Rt}\triangle AOC\backsim\text{Rt}\triangle OBD$，$\therefore\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle OBD}}=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2=\frac{\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$，$\therefore\frac{OA}{OB}=\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{OB}{OA}=2$. 故答案为 2.

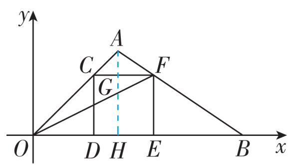
思路分析 过点 A 作 $AC\perp y$ 轴于点 C，过点 B 作 $BD\perp y$ 轴于点 D，则 $\triangle AOC\backsim\triangle OBD$，再根据反比例函数中 k 的几何意义，相似三角形面积比等于相似比的平方，即可求解.

4. $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 或 $(3,0)$ 或 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 【解析】如图(1)，当点 B 在点 E 右边时，过点 A 作 $AH\perp OB$ 于 H，交 CF 于 G，则 $GH=CD$. $\because$ 点 A 的坐标为 $(1,1)$，$\therefore AH=OH=1$，$\angle AOB=45°$，$\therefore$ 易知 $OD=CD$. 设 $CF=x$. $\because$ 四边形 $CDEF$ 是正方形，$\therefore CF/\!/DE$，$CD=CF=EF=DE=OD=GH=x$，$\angle OEF=\angle BEF=90°$，$\therefore OE=OD+DE=2EF=2x$. $\because$ 以 B,E,F 为顶点的三角形与 $\triangle OFE$ 相似，$\therefore$ ①$EF=2EB$，则 $EB=\frac{1}{2}x$，$\therefore OB=OE+EB=2x+\frac{1}{2}x=\frac{5}{2}x$. $\because CF/\!/DE$，$\therefore\triangle ACF\backsim\triangle AOB$，$\therefore\frac{CF}{OB}=\frac{AG}{AH}=\frac{1-x}{1}$，即 $\frac{x}{\frac{5}{2}x}=1-x$，$\therefore x=\frac{3}{5}$，$\therefore OB=\frac{5}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{2}$，$\therefore$ 点 B 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},0\right)$. ②$EB=2EF$，则 $EB=2x$，$\therefore OB=OE+EB=2x+2x=4x$. $\because CF/\!/DE$，$\therefore\triangle ACF\backsim\triangle AOB$，$\therefore\frac{CF}{OB}=\frac{AG}{AH}=\frac{1-x}{1}$，即 $\frac{x}{4x}=1-x$，$\therefore x=\frac{3}{4}$，$\therefore OB=4x=4\times\frac{3}{4}=3$，$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3,0)$. 如图(2)，当点 B 在点 E 左边时，过点 A 作 $AN\perp x$ 轴于 N，交 CF 的延长线于 M. 设 $CF=x$，同理可得 $CF/\!/OB$，$OD=CD=CF=EF=DE=MN=x$. 由题可知 $\triangle OEF\backsim\triangle FEB$，$\therefore OE:EF=EF:BE=2:1$，$\therefore BE=\frac{1}{2}x$，$\therefore OB=\frac{3}{2}x$. $\because CF/\!/OB$，$\therefore\triangle ACF\backsim\triangle AOB$，$\therefore\frac{CF}{OB}=\frac{AM}{AN}$，$\therefore\frac{x}{\frac{3}{2}x}=\frac{1-x}{1}$，$\therefore x=\frac{1}{3}$，$\therefore OB=\frac{1}{2}$，$\therefore B\left(\frac{1}{2},0\right)$. 综上所

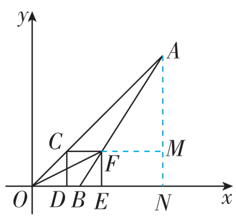
述，点 B 的坐标是 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 或 $(3,0)$ 或 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

故答案为 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 或 $(3,0)$ 或 $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

易错警示 分点 B 在点 E 左边和点 B 在点 E 右边两种情况，注意不要漏解.



图(1)



图(2)

5. (1)【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $\angle D=\angle A=90°$. ∵ $HM\perp MN$，∴ $\angle HMN=90°$，∴ $\angle DMN+\angle AMH=\angle AHM+\angle AMH=90°$，∴ $\angle AHM=\angle DMN$，∴ $\triangle AHM\backsim\triangle DMN$.

【解】(2)∵ 点 M 是 AD 的中点，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，∴ $MD=AM=2$. 设 $HM=HB=x$，则 $AH=4-x$. 在 Rt△AHM 中，$AH^2+AM^2=HM^2$，∴ $(4-x)^2+2^2=x^2$，解得 $x=2.5$，∴ $AH=1.5$.

∵ $\triangle AHM\backsim\triangle DMN$，∴ $\frac{AM}{DN}=\frac{MH}{MN}=\frac{AH}{MD}$，即 $\frac{2}{DN}=\frac{2.5}{MN}=\frac{1.5}{2}$，∴ $DN=\frac{8}{3}$，$MN=\frac{10}{3}$，∴ △DMN 的周长为 $DN+MN+DM=\frac{8}{3}+\frac{10}{3}+2=8$.

(3)△DMN 的周长是一个定值，始终为 8. 理由如下：

设 $HM=HB=x$，则 $AH=4-x$. 在 Rt△AHM 中，$AH^2+AM^2=HM^2$，∴ $(4-x)^2+AM^2=x^2$，即 $AM=\sqrt{8x-16}$，∴ $DM=4-AM=4-\sqrt{8x-16}$.

∵ $\triangle AHM\backsim\triangle DMN$，且相似比为 $\frac{AH}{MD}=\frac{4-x}{4-\sqrt{8x-16}}$，∴ $C_{\triangle DMN}=C_{\triangle AHM}\cdot\frac{4-\sqrt{8x-16}}{4-x}=(4-x+x+\sqrt{8x-16})\cdot\frac{4-\sqrt{8x-16}}{4-x}=8$. ∴ 在动点 H 逐渐向点 A 运动的过程中，△DMN 的周长是一个定值，始终为 8.

刷素养

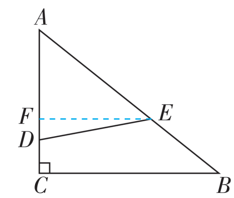
6.【解】(1)①∵ $DE/\!/BC$，∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ACB$.

∵ DE 平分△ABC 的面积，∴ $\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ACB}}=\frac{1}{2}$，

∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，即 $\frac{AD}{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，解得 $AD=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

②在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^3+4^2}=5$，∴ △$ABC$ 的周长为 $3+4+5=12$. ∵ DE 平分△ABC 的周长，∴ $AD+AE=6$，即 $AE=6-AD$. ∵ $DE/\!/BC$，∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$，即 $\frac{AD}{3}=\frac{6-AD}{5}$，解得 $AD=\frac{9}{4}$.

(2)存在. 如图，过点 E 作 $EF\perp AC$ 于 F. 设 DE 将△ABC 的周长平分，则 $AD+AE=6$，设 $AD=x$，则 $AE=6-x$. ∵ $\angle C=90°$，

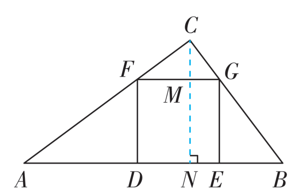


∴ $EF/\!/BC$，∴ $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，∴ $\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}$，即 $\frac{EF}{4}=\frac{6-x}{5}$，解得 $EF=\frac{24-4x}{5}$，∴ $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}\times AD\times EF=\frac{1}{2}x\cdot\frac{24-4x}{5}=-\frac{2}{5}x^2+\frac{12}{5}x$. 当 DE 将△ABC 的面积平分时，$-\frac{2}{5}x^2+\frac{12}{5}x=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{1}{2}$，解得 $x_1=\frac{6+\sqrt{6}}{2}$，$x_2=\frac{6-\sqrt{6}}{2}$. ∵ $0<x<3$，∴ $x=\frac{6-\sqrt{6}}{2}$，即当 $AD=\frac{6-\sqrt{6}}{2}$ 时，DE 将△ABC 的周长和面积同时平分.

微专题

刷有所得 三角形内接四边形问题，通常需要利用相似三角形对应高之比等于相似比求线段长.

1. 16∶9 【解析】如图，作 $CN\perp AB$，交 GF 于点 M，交 AB 于点 N. 在 Rt△ABC 中，∵ $AC=8$，$BC=6$，∴ $AB=10$，∴ $\frac{1}{2}AB\cdot CN=\frac{1}{2}BC\cdot AC$，∴ $CN=\frac{24}{5}$. ∵ $GF/\!/AB$，∴ 易得 $\triangle CGF\backsim\triangle CBA$，∴ $\frac{CM}{CN}=\frac{GF}{BA}$. 设正方形 $DEGF$ 的边长为 x，则 $\frac{\frac{24}{5}-x}{\frac{24}{5}}=\frac{x}{10}$，解得 $x=\frac{120}{37}$. ∵ $FD\perp AB$，∴ $\angle ADF=\angle ACB=90°$. ∵ $\angle A=\angle A$，∴ $\triangle ADF\backsim\triangle ACB$，∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{DF}{BC}$，即 $\frac{AD}{8}=\frac{\frac{120}{37}}{6}$，∴ $AD=\frac{160}{37}$. 同理可得 $\triangle BEG\backsim\triangle BCA$，∴ $\frac{BE}{BC}=\frac{EG}{AC}$，即 $\frac{BE}{6}=\frac{\frac{120}{37}}{8}$，∴ $BE=\frac{90}{37}$，∴ $AD:EB=\frac{160}{37}:\frac{90}{37}=16:9$，故答案为 16∶9.



2.【解】（1）设正方形零件的边长为 x mm，则 $PN=PQ=ED=x$ mm，$\therefore AE=AD-ED=(80-x)$ mm.

由题可知 $PN/\!/BC$，$\therefore \triangle APN\backsim\triangle ABC$，$\therefore \frac{PN}{BC}=\frac{AE}{AD}$，$\therefore \frac{x}{120}=\frac{80-x}{80}$，解得 $x=48$，$\therefore$ 这个正方形零件的边长是 48 mm.

（2）设 $PN=2y$ mm，则 $PQ=ED=y$ mm，$\therefore AE=AD-ED=(80-y)$ mm.

由题可知，$PN/\!/BC$，$\therefore \triangle APN\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \frac{PN}{BC}=\frac{AE}{AD}$，$\therefore \frac{2y}{120}=\frac{80-y}{80}$，解得 $y=\frac{240}{7}$，$\therefore PN=\frac{240}{7}\times2=\frac{480}{7}$(mm)，$\therefore$ 这个矩形零件的长和宽分别为 $\frac{480}{7}$ mm，$\frac{240}{7}$ mm.

（3）设 $PN=a$ mm，矩形零件 $PQMN$ 的面积为 S mm^2. 同理可得 $\triangle APN\backsim\triangle ABC$，$\therefore \frac{PN}{BC}=\frac{AE}{AD}$，

$\therefore \frac{a}{120}=\frac{80-PQ}{80}$，解得 $PQ=80-\frac{2}{3}a$，$\therefore S=PN\cdot PQ=a\left(80-\frac{2}{3}a\right)=-\frac{2}{3}a^2+80a=-\frac{2}{3}(a-60)^2+2\ 400$.

$\because -\frac{2}{3}<0$，$\therefore$ 当 $a=60$ 时，S 有最大值，最大值为 2 400，$\therefore$ 这个矩形零件的最大面积为 2 400 mm^2.

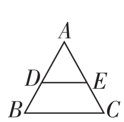
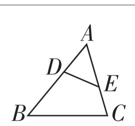
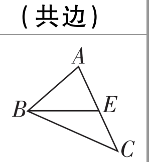
关键点拨

（3）设 $PN=a$ mm，根据相似三角形的判定与性质，用含 a 的式子表示出 PQ 的长，再利用二次函数的性质求解即可.

大招专题 2 相似三角形判定的常考模型

刷难关

大招解读｜A 字型

正 A 字型	斜 A 字型（共角）	斜 A 字型（共边）
 已知：$DE/\!/BC$；结论：$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$	 已知：$\angle ADE=\angle C$；结论：$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$	 已知：$\angle ABE=\angle C$；结论：$\triangle ABE\backsim\triangle ACB$

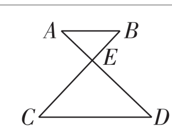
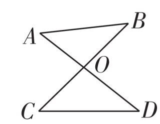
1. 3 或 $\frac{4}{3}$ 【解析】$\because D$ 为 AC 中点，$\therefore AD=\frac{1}{2}AC=2$. 当 $\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}$ 时，$\because \angle A=\angle A$，$\therefore \triangle AED\backsim\triangle ABC$，$\therefore AE=\frac{AB\cdot AD}{AC}=\frac{6\times2}{4}=3$；当 $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$ 时，$\because \angle A=\angle A$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，$\therefore AE=\frac{AC\cdot AD}{AB}=\frac{4\times2}{6}=\frac{4}{3}$. 综上，$AE=3$ 或 $\frac{4}{3}$. 故答案为 3 或 $\frac{4}{3}$.

关键点拨

先得到 $AD=\frac{1}{2}AC=2$，再分 $\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}$ 与 $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$ 两种情况讨论即可解答.

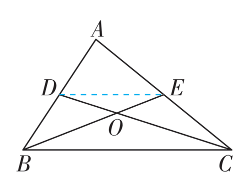
2. A 【解析】由题意得 $AD=4$，$BD=6$，$AB=10$. $\because DE/\!/AC$，$EF/\!/AB$，$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 为平行四边形，$\therefore AF=DE$，$EF=AD=4$. $\because EF/\!/AD$，$\therefore$ 易得 $\triangle CEF\backsim\triangle CBA$，$\therefore \frac{CF}{CA}=\frac{EF}{AB}$，$\therefore \frac{CF}{6}=\frac{4}{10}$，$\therefore CF=2.4$，$\therefore AF=AC-CF=6-2.4=3.6$，$\therefore DE=3.6$. 故 A 选项符合题意. 故选 A.

大招解读｜8 字型

正 8 字型	斜 8 字型（蝴蝶型）
 已知：$AB/\!/CD$；结论：$\triangle ABE\backsim\triangle DCE$	 已知：$\angle B=\angle D$；结论：$\triangle AOB\backsim\triangle COD$

3. $\sqrt{3}-1$ 【解析】在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，$\angle B=30^\circ$，$AB=\sqrt{3}$，$\therefore AE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$ 由勾股定理得，$BE=\frac{3}{2}$. 根据翻折性质可得 $BF=2BE=3$，$\therefore CF=3-\sqrt{3}$. $\because AD/\!/CF$，$\therefore$ 易证 $\triangle ADG\backsim\triangle FCG$，$\therefore \frac{AD}{CF}=\frac{DG}{CG}$. 设 $CG=x$，则 $\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-x}{x}$，解得 $x=\sqrt{3}-1$，故答案为 $\sqrt{3}-1$.

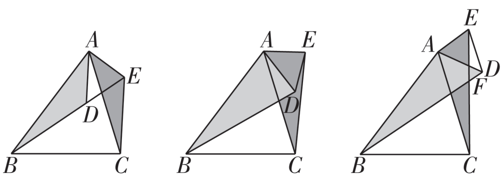
4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】如图所示，连接 DE. $\because$ 点 D，E 分别是 AB，AC 的中点，$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，$\therefore DE/\!/BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$，$\therefore$ 易得 $\triangle DOE\backsim\triangle COB$，$\therefore \frac{DO}{OC}=\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}$. 设 $DO=k$，则 $OC=2k$，$\therefore CD=3k$. $\because DE/\!/BC$，$\therefore \angle EBC=\angle DEB$. 又 $\because \angle ACO=\angle EBC$，$\therefore \angle DEB=\angle ACO$. 又 $\because \angle EDO=\angle CDE$，$\therefore \triangle DEO\backsim\triangle DCE$，$\therefore \frac{DE}{DC}=\frac{DO}{DE}$，$\therefore DE^2=DC\cdot DO$，即 $DE^2=3k\times k=$



$3k^2$,∴ $DE=\sqrt{3}k$,∴ $BC=2\sqrt{3}k$,∴ $\frac{CD}{BC}=\frac{3k}{2\sqrt{3}k}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故答案为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

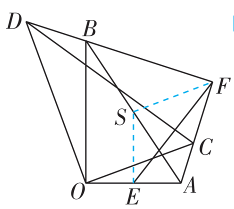
大招解读|手拉手型

△ABD和△ACE共顶点A,通过两边成比例且夹角相等或利用旋转构造等角来判定三角形相似. 常见模型如下:



AD在△ABC内且拉手线CE和BD无交点　AD在△ABC外且拉手线CE和BD无交点　AD在△ABC外且拉手线CE和BD有交点

5. $\sqrt{13}-3$ 【解析】如图,取AB的中点S,连接ES,FS,则$FS-ES\leqslant FE\leqslant ES+FS$. ∵ $\angle AOB=90°$, $OA=4$, $OB=6$,



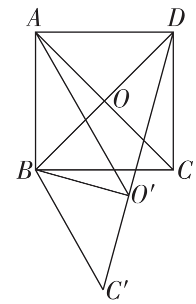
∴ $AB=2\sqrt{13}$. ∵ $\angle AOB=\angle COD=90°$, $\angle ABO=\angle CDO$,∴ $\triangle AOB\backsim\triangle COD$,∴ $OB:OD=OA:OC$. ∵ $\angle AOB=\angle COD$,∴ $\angle AOC=\angle BOD$, ∴ $\triangle DOB\backsim\triangle COA$, ∴ $\angle OBD=\angle OAC$. ∵ $\angle OBD+\angle FBO=180°$,∴ $\angle OAC+\angle FBO=180°$, ∴ $\angle AOB+\angle AFB=180°$, ∴ $\angle AFB=\angle AOB=90°$. 又∵ S为AB的中点, ∴ $FS=\frac{1}{2}AB=\sqrt{13}$. ∵ E为OA的中点,S为AB的中点,∴ $ES=\frac{1}{2}OB=3$,∴ EF的最小值为$\sqrt{13}-3$. 故答案为$\sqrt{13}-3$.

思路分析

取AB的中点S,连接ES,FS,则$FS-ES\leqslant EF\leqslant FS+ES$. 由题意可知,$\triangle AOB\backsim\triangle COD$,进而可得$\triangle DOB\backsim\triangle COA$,所以$\angle OBD=\angle OAC$,根据四边形内角和可得$\angle AOB=\angle AFB=90°$,再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得出FS的长,根据中位线定理可得ES的长,由此可得结论.

6. $\sqrt{3}-1$或$\sqrt{3}+1$ 【解析】①当$O'C'$在BD的上方时,∵ $\triangle O'C'B$,$\triangle ABD$是等腰直角三角形,∴ $O'B:BC'=AB:BD=1:\sqrt{2}$. ∵ $\angle ABO'+\angle ABC'=\angle DBC'+\angle ABC'=45°$,∴ $\angle ABO'=\angle DBC'$,∴ $\triangle ABO'\backsim\triangle DBC'$,∴ $AO':DC'=AB:BD$. ∵ $BC'=BC=2$,∴ $O'C'=BO'=\frac{\sqrt{2}}{2}BC'=\sqrt{2}$, $BD=\sqrt{2}BC=2\sqrt{2}$. ∵ $DO'^2=BD^2-BO'^2$, ∴ $DO'^2=(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2$, ∴ $DO'=\sqrt{6}$, ∴ $DC'=\sqrt{6}-\sqrt{2}$,∴ $AO':(\sqrt{6}-\sqrt{2})=1:\sqrt{2}$, ∴ $AO'=\sqrt{3}-1$.

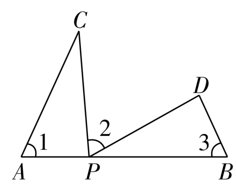
②当$O'C'$在BD的下方时,如图所示. 同理可证$\triangle ABO'\backsim\triangle DBC'$,∴ $AO':DC'=AB:BD=1:\sqrt{2}$. ∵ $BC'=BC=2$, ∴ $O'C'=BO'=\frac{\sqrt{2}}{2}BC'=\sqrt{2}$, $BD=\sqrt{2}BC=2\sqrt{2}$. ∵ $DO'^2=BD^2-BO'^2$,∴ $DO'^2=(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2$,∴ $DO'=\sqrt{6}$,∴ $DC'=\sqrt{6}+\sqrt{2}$,∴ $AO':(\sqrt{6}+\sqrt{2})=1:\sqrt{2}$, ∴ $AO'=\sqrt{3}+1$. 综上所述,AO'的长为$\sqrt{3}-1$或$\sqrt{3}+1$.



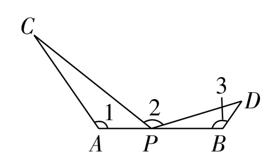
大招解读|一线三等角型

如图,已知A,P,B三点共线,且∠1=∠2=∠3.

(1)点P在线段AB上:

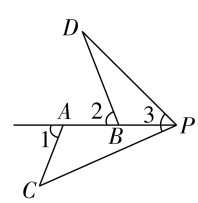


图(1)

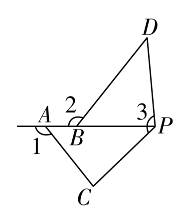


图(2)

(2)点P在线段AB的延长线上:



图(3)



图(4)

结论:$\triangle ACP\backsim\triangle BPD$.

7. (1)【证明】在正方形ABCD中,∠B=∠C=90°. ∵ $AM\perp MN$,∴ $\angle AMN=90°$,∴ $\angle CMN+\angle AMB=90°$.

在Rt△ABM中,$\angle MAB+\angle AMB=90°$, ∴ $\angle CMN=\angle MAB$,∴ Rt△ABM∽Rt△MCN.

(2)【解】∵ $\angle B=\angle AMN=90°$,∴ 要使Rt△ABM∽Rt△AMN,必须有$\frac{AM}{MN}=\frac{AB}{BM}$. 由(1)知$\frac{AM}{MN}=\frac{AB}{MC}$,∴ $BM=MC$,∴ 当点M运动到BC的中点时,Rt△ABM∽Rt△AMN,此时$x=2$.

易错警示

(2)当两个相似三角形用符号"∽"相连时,它们各顶点的对应关系就是确定的,故此小问仅有一种情况.

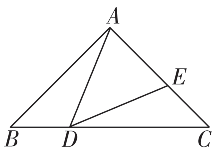
8. (1)【证明】由题图,得$\angle ADE+\angle ADB+\angle EDC=180°$. 在△ABD中,∵ $\angle B+\angle ADB+\angle DAB=180°$, $\angle B=\angle ADE$, ∴ $\angle EDC=\angle DAB$,∴ $\triangle BDA\backsim\triangle CED$.

(2)【解】∵ $\angle B=\angle ADE=\angle C$, $\angle B=45°$, ∴ △ABC是等腰直角三角形,$\angle BAC=90°$.

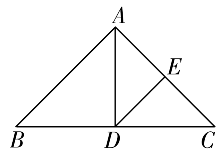
$\because BC=2,\therefore AB=AC=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=\sqrt{2}$.

①当 $AD=AE$ 时，$\angle ADE=\angle AED$. $\because \angle B=45°$，$\therefore \angle B=\angle ADE=\angle AED=45°$，$\therefore \angle DAE=90°$，$\therefore \angle DAE=\angle BAC=90°$. $\because$ 点 D 在 BC 上运动（点 D 不与 B,C 重合），$\therefore$ 此情况不符合题意.

②当 $AD=DE$ 时，如图(1)，$\angle DAE=\angle DEA$. 由(1)易证$\triangle BDA\cong\triangle CED$，$\therefore AB=DC=\sqrt{2}$，$\therefore BD=2-\sqrt{2}$.



图(1)



图(2)

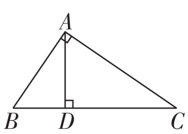
③当 $AE=DE$ 时，如图(2)，$\angle ADE=\angle DAE=45°$，$\therefore \triangle AED$ 是等腰直角三角形. $\because \angle B=\angle C=\angle DAE=45°$，$\therefore \angle ADC=90°$，即 $AD\perp BC$，$\therefore BD=\frac{1}{2}BC=1$.

综上所述，$BD=2-\sqrt{2}$或 1.

关键点拨

(2)当$\triangle ADE$是等腰三角形时，注意分$AD=AE$，$AD=DE$，$AE=DE$三种情况进行讨论.

大招解读｜射影定理（子母型）

基本模型	结论
 Rt△ABC 中，$AD\perp BC$	$\triangle ABC\backsim\triangle DBA\backsim\triangle DAC$

9. (1)【证明】$\because CD\perp AB$，$\therefore \angle CDA=\angle CDB=90°$. $\because \angle ACB=90°$，$\therefore \angle ACD+\angle BCD=90°$. 又$\because \angle BCD+\angle B=90°$，$\therefore \angle ACD=\angle B$，$\therefore \triangle ACD\backsim\triangle CBD$.

(2)【证明】$\because \angle ACB=\angle CDB=90°$，$\angle B=\angle B$，$\therefore \triangle ACB\backsim\triangle CDB$，$\therefore \frac{BC}{AB}=\frac{BD}{BC}$，即 $BC^2=BD\cdot AB$.

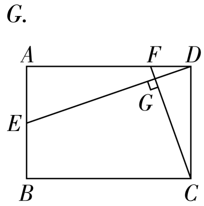
(3)【解】$\because \triangle ACD\backsim\triangle CBD$，$\therefore \frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$，$\therefore CD^2=AD\cdot DB$. $\because AD=3$，$BD=2$，$\therefore CD^2=6$. $\because CD>0$，$\therefore CD=\sqrt{6}$.

刷有所得

在任意直角三角形中过直角顶点向斜边作垂线，得到的两个小直角三角形都和原直角三角形相似.

大招解读｜十字型

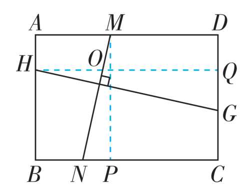
如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E,F 分别在边 AB,AD 上，$CF\perp ED$ 于 G.



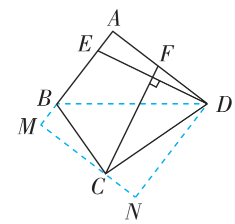
结论：$\triangle CDG\backsim\triangle DEA\backsim\triangle DFG\backsim\triangle CFD$.

10. (1)【解】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore \angle A=\angle ADC=90°$，$\therefore \angle FCD+\angle DFC=90°$. $\because ED\perp CF$，$\therefore \angle ADE+\angle DFC=90°$，$\therefore \angle ADE=\angle DCF$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle DCF$，$\therefore \frac{DE}{CF}=\frac{AD}{CD}$. 故答案为=.

(2)【证明】过 M 作 $MP\perp BC$ 于 P，过 H 作 $HQ\perp CD$ 于 Q，交 MN 于 O，如图(1). 易得 $AD/\!/HQ/\!/BC$，$HQ=AD$，$MP=CD$，$\therefore \angle HON=\angle MNP$. $\because MN\perp GH$，$MP\perp BC$，$\therefore \angle QHG+\angle HON=90°$，$\angle MNP+\angle NMP=90°$，$\therefore \angle QHG=\angle NMP$. 又$\because \angle HQG=\angle MPN=90°$，$\therefore \triangle HQG\backsim\triangle MPN$，$\therefore \frac{GH}{MN}=\frac{HQ}{MP}=\frac{AD}{CD}$.



图(1)



图(2)

【解】(3)由(1)可知，$\frac{DE}{CF}=\frac{AD}{CD}$，由(2)可知，$\frac{HG}{MN}=\frac{AD}{CD}$，$\therefore \frac{DE}{CF}=\frac{GH}{MN}=\frac{7}{5}$.

(4)$\frac{DE}{CF}=\frac{25}{24}$. 过点 C 作 $CM\perp AB$ 交 AB 的延长线于 M，过点 D 作 $DN\perp MC$ 交 MC 的延长线于 N，连接 BD，如图(2)，则易知四边形 $AMND$ 是矩形，$\therefore AM=DN$，$AD=MN$. $\because AB=6$，$AD=8$，$\angle BAD=90°$，$\therefore BD=10$. 又$\because BC=6$，$CD=8$，$\therefore BC^2+CD^2=BD^2$，$\therefore BC\perp CD$，$\therefore \angle MCB+\angle NCD=90°$. 又$\because \angle MCB+\angle MBC=90°$，$\therefore \angle MBC=\angle DCN$，$\therefore \triangle CMB\backsim\triangle DNC$，$\therefore \frac{BM}{CN}=\frac{CM}{DN}=\frac{BC}{CD}=\frac{3}{4}$. 设 $BM=x$，则 $AM=6+x=DN$，$\therefore MC=\frac{3}{4}(6+x)$，$CN=\frac{4}{3}x$. $\because CM+CN=AD=8$，$\therefore \frac{3}{4}(6+x)+\frac{4}{3}x=8$，解得 $x=\frac{42}{25}$，$\therefore DN=\frac{192}{25}$. 由(1)可知，$\frac{DE}{CF}=\frac{AD}{DN}=\frac{8}{\frac{192}{25}}=\frac{25}{24}$.

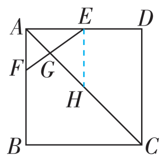
大招专题3　相似三角形的常见辅助线的作法

刷难关

大招解读｜作平行线

如果题目中的线段有比例（或数量）关系，且已知线段和所求相关线段能放在“A 字型”或“8 字型”相似三角形中，那么可在成比例线段的端点作平行线构造“A 字型”或“8 字型”相似模型.

1.【解】如图，作 $EH//CD$，交 AC 于点 H.



∵ 在边长为 6 的正方形 $ABCD$ 中，$AD=2AE$，$AB=3AF$，

∴ $\angle BAD=90°$，$AE=3$，$AF=2$，

∴ $EF=\sqrt{AE^2+AF^2}=\sqrt{13}$.

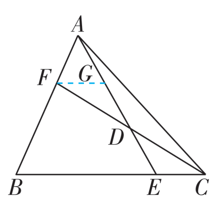
∵ $EH//CD$，∴ $\triangle AEH\backsim\triangle ADC$，

∴ $\dfrac{EH}{CD}=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{1}{2}$. ∵ $CD=6$，∴ $EH=3$.

∵ $EH//AF$，∴ $\triangle AFG\backsim\triangle HEG$，∴ $\dfrac{FG}{EG}=\dfrac{AF}{EH}$，

即 $\dfrac{FG}{\sqrt{13}-FG}=\dfrac{2}{3}$，∴ $FG=\dfrac{2\sqrt{13}}{5}$.

2.【解】(1) 如图，过点 F 作 $FG//BC$ 交 AE 于 G，则 $\angle DFG=\angle DCE$. ∵ D 是 CF 的中点，∴ $CD=DF$. 在 $\triangle DFG$ 和 $\triangle DCE$ 中，



$$\begin{cases}\angle DFG=\angle DCE,\\ DF=CD,\\ \angle GDF=\angle EDC,\end{cases}$$

∴ $\triangle DFG\cong\triangle DCE$（ASA），

∴ $EC=GF$. ∵ $BF:AF=m:n$，∴ $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{n}{m+n}$.

∵ $FG//BC$，∴ $\triangle AFG\backsim\triangle ABE$，∴ $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{FG}{BE}=\dfrac{n}{m+n}$，∴ $BE:EC$ 的值为 $\dfrac{m+n}{n}$.

(2) $CF\perp AB$. 证明：若 $BE=2EC$，则 $\dfrac{BE}{EC}=2$. 由 (1) 知 $\dfrac{m+n}{n}=2$，解得 $m=n$，∴ 点 F 是 AB 的中点. ∵ $AC=BC$，∴ $CF\perp AB$.

(3) 不能. 理由如下：假设点 E 能成为 BC 的中点，则 $BE=EC$，∴ $\dfrac{BE}{EC}=1$. 由 (1) 知 $\dfrac{m+n}{n}=1$，解得 $m=0$，这与 $m>0$ 相矛盾，∴ 点 E 不能成为 BC 的中点.

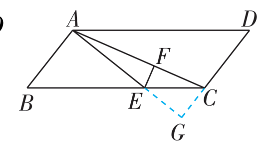
思路分析

(1) 过点 F 作 $FG//BC$ 交 AE 于 G. 根据两直线平行，内错角相等可得 $\angle DFG=\angle DCE$，根据对顶角相等得 $\angle GDF=\angle EDC$，再根据中点定义可得 $CD=DF$，然后利用“角边角”证明 $\triangle DCE$ 和 $\triangle DFG$ 全等，根据全等三角形对应边相等可得 $EC=GF$，然后求出 $\dfrac{AF}{AB}$，再证明 $\triangle AFG$ 和 $\triangle ABE$ 相似，根据相似三角形对应边成比例即可得到 $\dfrac{FG}{BE}$，从而得到 $BE:EC$ 的值.

大招解读｜作延长线

如果题目中的线段有比例（或数量）关系和平行关系，且已知线段和所求相关线段能放在“8 字型”相似三角形中，那么可延长平行线使其与另一条延长线相交构造“8 字型”相似模型.

3.【解】如图，延长 DC，AE 交于点 G.



∵ 在平行四边形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$\angle BAE=90°$，∴ $\angle BAE=\angle CGE=90°$. ∵ $\angle BEA=\angle CEG$，

∴ $\triangle ABE\backsim\triangle GCE$，∴ $\dfrac{AB}{GC}=\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{AE}{GE}$.

∵ $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{4}{3}$，∴ 设 $AE=4k$，$AB=3k$.

∵ $CE=\dfrac{1}{2}BE$，∴ $\dfrac{AB}{GC}=\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{AE}{GE}=2$，即 $\dfrac{3k}{GC}=\dfrac{4k}{GE}=2$，

∴ $GC=\dfrac{3k}{2}$，$GE=2k$，∴ $AG=AE+GE=4k+2k=6k$.

∵ $\angle AFE=\angle AGC=90°$，$\angle EAF=\angle CAG$，

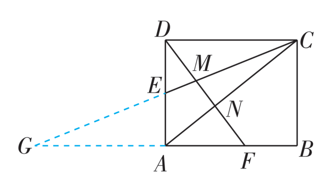
∴ $\triangle EAF\backsim\triangle CAG$，∴ $\dfrac{EF}{AF}=\dfrac{GC}{AG}=\dfrac{\frac{3k}{2}}{6k}=\dfrac{1}{4}$.

4.【解】(1) ∵ 在矩形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=\angle ADC=90°$，∴ $\angle ADF+\angle AFD=90°$. ∵ $CE\perp DF$，∴ $\angle ADF+\angle DEC=90°$，∴ $\angle AFD=\angle DEC$，

∴ $\triangle ADF\backsim\triangle DCE$，∴ $\dfrac{AF}{DE}=\dfrac{DA}{CD}$. ∵ $AB=5$，$AD=4$，点 E 是边 AD 的中点，∴ $DE=\dfrac{1}{2}AD=2$，

∴ $\dfrac{AF}{2}=\dfrac{4}{5}$，解得 $AF=\dfrac{8}{5}$.

(2) 如图，延长 CE，BA 交于点 G.



∵ $2AF=3BF$，$AF+BF=AB=5$，

∴ $AF=3$.

∵ 在 Rt$\triangle ADF$ 中，$AF=3$，$AD=4$，∴ 由勾股定理得 $DF=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

∵ $DC//AF$，∴ $\triangle DCN\backsim\triangle FAN$，

∴ $\dfrac{DN}{FN}=\dfrac{DC}{FA}=\dfrac{5}{3}$，即 $\dfrac{5-FN}{FN}=\dfrac{5}{3}$，解得 $FN=\dfrac{15}{8}$.

∵ $DC//GB$，∴ $\triangle AGE\backsim\triangle DCE$，∴ $\dfrac{AG}{DC}=\dfrac{AE}{DE}$.

∵ $AE=DE$，∴ $AG=DC=5$，∴ $FG=8$.

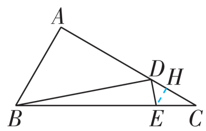
∵ $DC//GB$，∴ $\triangle DCM\backsim\triangle FGM$，∴ $\dfrac{DM}{FM}=\dfrac{DC}{FG}=$

$\frac{5}{8}$. ∵ $DM+FM=5$，∴ $FM=\frac{40}{13}$，∴ $MN=FM-FN=\frac{125}{104}$.

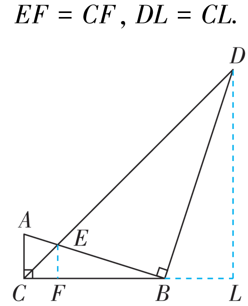
大招解读｜作垂线

适用情形：①题目中所求线段与垂线有关；②题中已有90°角或垂直关系，且已知线段和所求相关线段能放在相似三角形中，可借助作垂线构造"A字型"或"一线三垂直型"相似模型.

5.【解】如图，过点 E 作 $EH\perp AC$ 于点 H. ∵ $\angle A=90°$，$DE\perp BD$，∴ $\angle A=\angle BDE=\angle EHD=90°$，∴ $\angle ABD+\angle ADB=90°$，$\angle EDH+\angle ADB=90°$，∴ $\angle ABD=\angle EDH$，∴ $\triangle ABD\backsim\triangle HDE$，∴ $\frac{AB}{HD}=\frac{AD}{HE}$. ∵ $AB=1$，$BC=2$，$AD=2CD$，∴ $AC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，$\angle C=30°$，∴ $AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$CD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴ $\frac{1}{HD}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{HE}$，即 $HD=\frac{\sqrt{3}}{2}HE$. 设 $EH=x$，则 $HD=\frac{\sqrt{3}}{2}x$. ∵ $\angle C=30°$，∴ $EC=2x$，$CH=\sqrt{3}x$，∴ $CD=CH+HD=\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{3\sqrt{3}}{2}x$，∴ $\frac{3\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴ $x=\frac{2}{9}$，∴ 点 E 到 AC 的距离为 $\frac{2}{9}$.



6.【解】如图，作 $EF\perp CB$ 于点 F，$DL\perp CB$ 交 CB 的延长线于点 L，则 $\angle CFE=\angle EFB=\angle L=90°$. ∵ $\angle ACB=90°$，CD 平分 $\angle ACB$，∴ $\angle BCD=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$，∴ $\angle FEC=\angle LDC=\angle LCD=45°$，∴ $EF=CF$，$DL=CL$. ∵ $BD\perp AB$，∴ $\angle ABD=90°$，∴ $\angle FBE=\angle LDB=90°-\angle LBD$，∴ $\triangle FBE\backsim\triangle LDB$，∴ $\frac{EF}{BL}=\frac{BF}{DL}=\frac{BE}{BD}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}=\frac{1}{2}$，∴ $BL=2EF$，$DL=2BF$. 设 $EF=CF=m$，则 $BL=2m$. ∵ $DL=CL=2BF=BF+m+2m$，∴ $BF=3m$，∴ $BC=m+3m=4m$. ∵ $BE=\sqrt{EF^2+BF^2}=\sqrt{m^2+(3m)^2}=\sqrt{10}m=\sqrt{10}$，∴ $m=1=EF$. ∵ $\angle ACB=\angle EFB=90°$，$\angle ABC=\angle EBF$，∴ $\triangle ABC\backsim\triangle EBF$，∴ $\frac{AC}{EF}=\frac{BC}{BF}=\frac{4m}{3m}=\frac{4}{3}$，∴ $AC=\frac{4}{3}EF=\frac{4}{3}\times1=\frac{4}{3}$.



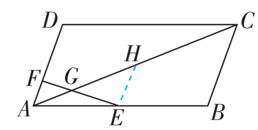
关键点拨 题中直线 BC 上已有两个直角，则可想到作 $DL\perp CB$ 交 CB 的延长线于点 L，构造相似三角形.

大招解读｜取中点作中位线

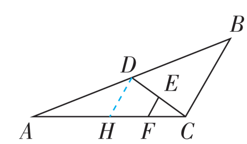
适用情形：如果题目中有中点，那么可过中点作已知三角形的中位线，构造相似三角形.

思路分析 取 AC 的中点 H，连接 EH. 先证出 $EH/\!/BC$，$EH=\frac{1}{2}BC$，然后证明 $\triangle GHE\backsim\triangle GAF$，进而得到 $\frac{GH}{GA}=\frac{EH}{FA}$，求得 $GH=\frac{9}{2}$，即可得出答案.

7.【解】如图，取 AC 的中点 H，连接 EH. ∵ E 为 AB 的中点，H 为 AC 的中点，∴ EH 为 $\triangle ABC$ 的中位线，∴ $EH/\!/BC$，$EH=\frac{1}{2}BC$. 在平行四边形 $ABCD$ 中，∵ $AF=2$，$DF=4$，∴ $AD=AF+DF=6$，∴ $BC=AD=6$，∴ $EH=3$. ∵ $EH/\!/BC/\!/DA$，∴ $\triangle GHE\backsim\triangle GAF$，∴ $\frac{GH}{GA}=\frac{EH}{FA}$，即 $GH=\frac{3\times3}{2}=\frac{9}{2}$，∴ $AC=2\times\left(3+\frac{9}{2}\right)=15$.



8.【解】取 AC 的中点 H，连接 DH，如图. ∵ 点 D 为 AB 的中点，∴ DH 是 $\triangle ABC$ 的中位线，∴ $DH/\!/BC$，$DH=\frac{1}{2}BC$. ∵ $EF/\!/BC$，点 E 为 CD 的中点，∴ $EF/\!/DH$，$CE=DE=\frac{1}{2}CD$，∴ $\triangle CEF\backsim\triangle CDH$，∴ $\frac{EF}{DH}=\frac{CE}{CD}=\frac{1}{2}$，∴ $DH=2EF=2$，∴ $BC=2DH=4$.



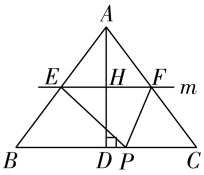
重难专题2 相似三角形与几何变换的综合

刷难关

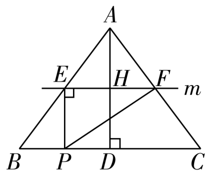
1.【解】(1)根据题意可知，$DH=2t$，∴ $AH=8-2t$. ∵ $EF/\!/BC$，∴ $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，∴ $\frac{EF}{BC}=\frac{AH}{AD}$，即 $\frac{EF}{10}=\frac{8-2t}{8}$，解得 $EF=10-\frac{5}{2}t$. 故答案为 $8-2t$，$10-\frac{5}{2}t$.

(2)如图(1)，$S_{\triangle PEF}=\frac{1}{2}EF\cdot DH=\frac{1}{2}\left(10-\frac{5}{2}t\right)\cdot2t=-\frac{5}{2}t^2+10t=-\frac{5}{2}(t-2)^2+10\left(0<t\leqslant\frac{10}{3}\right)$，∴ 当 $t=2$ 时，$S_{\triangle PEF}$ 取最大值，最大值为

10,此时 $BP=3t=6$.



图(1)



图(2)

(3)存在.

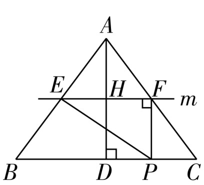
分三种情况:①若 E 为直角顶点,如图(2).

此时,$PE//AD$,$PE=DH=2t$,$BP=3t$. ∵ $AB=AC$,$AD\perp BC$,∴ $BD=CD=\frac{1}{2}BC=5$. ∵ $PE//AD$,∴ $\triangle BEP\backsim\triangle BAD$,∴ $\frac{PE}{AD}=\frac{BP}{BD}$,即 $\frac{2t}{8}=\frac{3t}{5}$,此比例式不成立,故不存在这种情况.

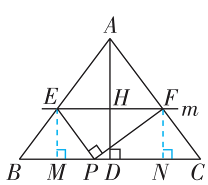
②若 F 为直角顶点,如图(3).

此时,$PF//AD$,$PF=DH=2t$,$BP=3t$,∴ $CP=10-3t$. ∵ $PF//AD$,∴ $\triangle CFP\backsim\triangle CAD$,∴ $\frac{PF}{AD}=\frac{CP}{CD}$,即 $\frac{2t}{8}=\frac{10-3t}{5}$,解得 $t=\frac{40}{17}$.

易错警示 (3)题中并未说明 $\triangle PEF$ 的直角顶点,故要注意分情况讨论,不要漏解.



图(3)



图(4)

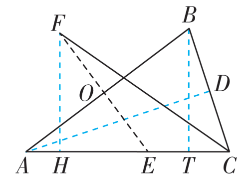
③若 P 为直角顶点,如图(4).

过点 E 作 $EM\perp BC$ 于点 M,过点 F 作 $FN\perp BC$ 于点 N,则 $EM=FN=DH=2t$,$EM//FN//AD$.

∵ $EM//AD$,∴ $\triangle BEM\backsim\triangle BAD$,∴ $\frac{EM}{AD}=\frac{BM}{BD}$,即 $\frac{2t}{8}=\frac{BM}{5}$,解得 $BM=\frac{5}{4}t$,∴ $PM=BP-BM=3t-\frac{5}{4}t=\frac{7}{4}t$,∴ $EP^2=EM^2+PM^2=(2t)^2+\left(\frac{7}{4}t\right)^2=\frac{113}{16}t^2$. ∵ $FN//AD$,∴ $\triangle CFN\backsim\triangle CAD$,∴ $\frac{FN}{AD}=\frac{CN}{CD}$,即 $\frac{2t}{8}=\frac{CN}{5}$,解得 $CN=\frac{5}{4}t$,∴ $PN=BC-BP-CN=10-3t-\frac{5}{4}t=10-\frac{17}{4}t$,∴ $PF^2=FN^2+PN^2=(2t)^2+\left(10-\frac{17}{4}t\right)^2=\frac{353}{16}t^2-85t+100$. ∵ $EF^2=PE^2+PF^2$,∴ $\left(10-\frac{5}{2}t\right)^2=\frac{113}{16}t^2+\left(\frac{353}{16}t^2-85t+100\right)$,解得 $t=\frac{280}{183}$ 或 $t=0$(舍去).

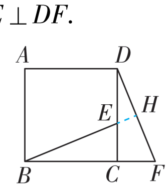
综上,当 $t=\frac{40}{17}$ 或 $\frac{280}{183}$ 时,$\triangle PEF$ 为直角三角形.

2. C 【解析】如图,设 EF 与 AB 交于点 O,过点 B 作 $BT\perp AC$ 于点 T,过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D,过点 F 作 $FH\perp AC$ 于点 H. ∵ $AB=AC=5$,$BC=\sqrt{10}$,$AD\perp BC$,∴ $BD=CD=\frac{\sqrt{10}}{2}$,∴ $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$. ∵ $\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BT$,∴ $BT=\frac{\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{2}}{5}=3$,∴ $AT=\sqrt{AB^2-BT^2}=4$. ∵ $AC=5$,$CE=2$,∴ $AE=5-2=3$. ∵ E,F 关于 AB 对称,∴ $EF\perp AB$,∴ $\angle AOE=90°$. ∵ $\angle EAO=\angle BAT$,$\angle AOE=\angle ATB=90°$,∴ $\triangle AOE\backsim\triangle ATB$,∴ $\frac{OE}{BT}=\frac{AE}{AB}$,∴ $\frac{OE}{3}=\frac{3}{5}$,∴ $OE=\frac{9}{5}$. ∵ E,F 关于 AB 对称,∴ $EF=2OE=2\times\frac{9}{5}=\frac{18}{5}$. ∵ $\angle EFH+\angle FEH=90°$,$\angle BAT+\angle FEH=90°$,∴ $\angle EFH=\angle BAT$. ∵ $\angle FHE=\angle ATB=90°$,∴ $\triangle FHE\backsim\triangle ATB$,∴ $\frac{FH}{AT}=\frac{EH}{TB}=\frac{EF}{AB}$,∴ $\frac{FH}{4}=\frac{EH}{3}=\frac{\frac{18}{5}}{5}$,∴ $EH=\frac{54}{25}$,$FH=\frac{72}{25}$,∴ $CH=EH+EC=\frac{54}{25}+2=\frac{104}{25}$,∴ $CF=\sqrt{FH^2+CH^2}=\sqrt{\left(\frac{72}{25}\right)^2+\left(\frac{104}{25}\right)^2}=\frac{8\sqrt{10}}{5}$. 故选 C.

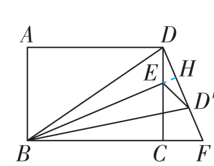


关键点拨 解题的关键是作辅助线,构造相似三角形.

3.【解】(1)$BE=DF$,$BE\perp DF$. 理由如下:如图(1),延长 BE 交 DF 于点 H. ∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形,∴ $BC=CD$,$\angle BCD=\angle DCF=90°$. ∵ $CE=CF$,∴ $\triangle BCE\cong\triangle DCF$(SAS),∴ $BE=DF$,$\angle CDF=\angle CBE$. 在 $\triangle DHE$ 和 $\triangle BCE$ 中,∵ $\angle DEH=\angle BEC$,∴ $\angle DHE=\angle BCE=90°$,即 $BE\perp DF$.



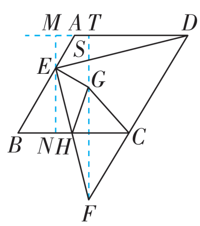
图(1)



图(2)

(2) $\frac{DF}{BE}=\frac{3}{4}$, $BE\perp DF$. 证明如下：如图(2)，延长 BE 交 DF 于 H. 由题意得，点 D 与点 D' 关于 BE 对称，$\therefore BE\perp DD'$，即 $BE\perp DF$，$\therefore \angle DHE=\angle BCE=90°$. 在 $\triangle DHE$ 和 $\triangle BCE$ 中，$\because \angle DEH=\angle BEC$，$\therefore \angle CDF=\angle CBE$. $\because \angle BCD=\angle DCF$，$\therefore \triangle BCE\backsim\triangle DCF$，$\therefore DF:BE=CD:BC=AB:AD=3:4$，即 $\frac{DF}{BE}=\frac{3}{4}$.

(3) 如图(3)，连接 FG 并延长交 AD 于点 T，交 DE 于 S，过 E 作 $MN\perp BC$ 于 N，交 DA 的延长线于 M. 由旋转得，$AE=EG$，$DE=EF$，$\angle AEG=\angle DEF=90°$，$\therefore \angle AED=\angle GEF$，$\therefore \triangle ADE\cong\triangle GFE$ (SAS)，$\therefore GF=AD=6$，$\angle ADE=\angle EFG$. 在 $\triangle TSD$ 和 $\triangle EFS$ 中，$\because \angle ESF=\angle TSD$，$\therefore \angle DTS=\angle FES=90°$. $\because AD\parallel BC$，$\therefore GF\perp BC$. $\because AB=6$，$BE=2AE$，$\therefore AE=2$，$BE=4$. $\because \angle B=60°$，$MN\perp BC$，$\therefore \angle BEN=30°$，$\therefore BN=\frac{1}{2}BE=2$，$\therefore EN=\sqrt{BE^2-BN^2}=2\sqrt{3}$. $\because \angle AEM=\angle BEN=30°$，$\therefore AM=\frac{1}{2}AE=1$，$\therefore MD=6+1=7$，$ME=\sqrt{AE^2-AM^2}=\sqrt{3}$. $\because MN\perp BC$，$\therefore \angle NHE+\angle NEH=90°$. $\because \angle NEH+\angle MED=90°$，$\therefore \angle EHN=\angle MED$. $\because \angle EMD=\angle ENH=90°$，$\therefore \triangle MED\backsim\triangle NHE$，$\therefore NH:ME=EN:MD$，即 $NH:\sqrt{3}=2\sqrt{3}:7$，$\therefore NH=\frac{6}{7}$，$\therefore HC=6-2-\frac{6}{7}=\frac{22}{7}$，$\therefore S_{四边形CFHG}=\frac{1}{2}GF\cdot HC=\frac{1}{2}\times6\times\frac{22}{7}=\frac{66}{7}$.



图(3)

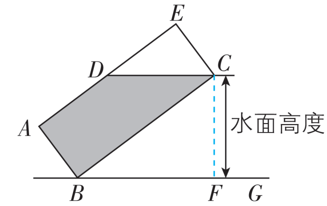
27.2.3　相似三角形应用举例

刷基础

1. 12　【解析】延长 DE 交 AB 于 H. $\because DE\parallel AC$，$AB\perp AC$，$CD\perp AC$，$\therefore$ 易得四边形 $ACDH$ 是矩形，$\therefore \angle BHD=\angle AHD=90°$，$AH=CD=1.5$ 米，$DH=AC=14$ 米. $\because \angle DFE=\angle DHB=90°$，$\angle EDF=\angle BDH$，$\therefore \triangle DFE\backsim\triangle DHB$，$\therefore \frac{DF}{DH}=\frac{EF}{BH}$，$\therefore \frac{2}{14}=\frac{1.5}{BH}$，$\therefore BH=10.5$ 米，$\therefore AB=BH+AH=10.5+1.5=12$(米)，故答案为 12.

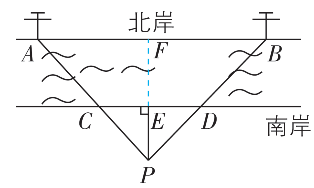
思路分析 设 $DE=x$，则 $AD=8-x$. 由长方体容器内水的体积不变列方程，解方程求出 DE，再由勾股定理求出 CD. 过点 C 作 $CF\perp BG$ 于 F，证明 $\triangle CDE\backsim\triangle CBF$，再根据相似三角形的性质即可求解.

2. $\frac{24}{5}$　【解析】如图，过点 C 作 $CF\perp BG$ 于 F. 设 $DE=x$，则 $AD=8-x$. 根据题意得 $\frac{1}{2}(8-x+8)\times3\times3=3\times3\times6$，解得 $x=4$，$\therefore DE=4$.



$\because \angle E=90°$，$\therefore CD=\sqrt{DE^2+CE^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. $\because \angle BCE=\angle DCF=90°$，$\therefore \angle DCE=\angle BCF$. 又 $\because \angle DEC=\angle BFC=90°$，$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle CBF$，$\therefore \frac{CE}{CF}=\frac{CD}{CB}$，即 $\frac{3}{CF}=\frac{5}{8}$，$\therefore CF=\frac{24}{5}$.

3. B　【解析】延长 PE 交 AB 于点 F，如图所示.



$\because PE\perp CD$，$AB\parallel CD$，$\therefore PF\perp AB$. 设这条河的宽度为 x 米. $\because AB\parallel CD$，$\therefore \triangle PBA\backsim\triangle PDC$，$\therefore \frac{PF}{PE}=\frac{AB}{CD}$. 依题意得，$CD=30$ 米，$AB=75$ 米，$PE=20$ 米，$\therefore \frac{20+x}{20}=\frac{75}{30}$，解得 $x=30$，即这条河的宽度为 30 米，故选 B.

思路分析 延长 PE 交 AB 于点 F，设这条河的宽度为 x 米. 由相似三角形的判定与性质得到 $\frac{PF}{PE}=\frac{AB}{CD}$，代入相关数据列方程求解即可.

4. 9　【解析】设 AF 与 PG 交于 H. $\because FD\perp EB$，$AC\perp EB$，$\therefore DF\parallel AC$. $\because DF=AC$，$\therefore$ 四边形 $ACDF$ 是平行四边形. $\because \angle ACD=90°$，$\therefore$ 四边形 $ACDF$ 是矩形，$\therefore AF\parallel EB$，$\therefore \triangle PAF\backsim\triangle PBE$，$\therefore \frac{AF}{BE}=\frac{PH}{PG}$，$\therefore \frac{1.8}{BE}=\frac{1.5-1.2}{1.5}$，$\therefore BE=9$ 米.

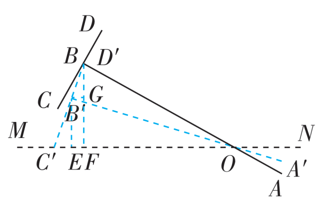
5. 【解】依题意得 $DE\perp EC$，$CF\perp EC$，$\therefore DE\parallel CF$，$\therefore \triangle PDE\backsim\triangle PCF$，$\therefore \frac{PE}{PF}=\frac{DE}{CF}$. 又 $\because DE=150$ cm，$CF=90$ cm，$\therefore \frac{PE}{PF}=\frac{DE}{CF}=\frac{150}{90}=\frac{5}{3}$，$\therefore \frac{PE}{EF}=\frac{5}{8}$. 同理可证 $\triangle PME\backsim\triangle FCE$，$\therefore \frac{PM}{FC}=\frac{PE}{EF}$，$\therefore \frac{PM}{90}=\frac{5}{8}$，$\therefore PM=\frac{225}{4}$ cm.

答：支点 P 到地面的距离 PM 为 $\frac{225}{4}$ cm.

刷提升

1. D　【解析】将“碓”绕点 O 旋转到如图所示位置，使点 C 的对应点 C' 落在 OM 上(点 A，B，D

的对应点分别为 A',B',D'),过点 B 作 $BF\perp MN$ 于点 F,过 B' 作 $B'E\perp MN$ 于点 E,$B'G\perp BF$ 于点 G,则四边形 $B'EFG$ 是矩形,$\therefore FG=B'E$. $\because \angle BOM=30°$,$OB=120$,$\therefore BF=\frac{1}{2}OB=60$. $\because CD\perp AB$ 于点 B,$BC=40$,$\therefore OB'\perp C'D'$,$B'C'=40$,$OB=OB'=120$,$\therefore OC'=\sqrt{OB'^2+B'C'^2}=40\sqrt{10}$. $\because \angle OB'C'=\angle OEB'=90°$,$\angle B'OC'=\angle EOB'$,$\therefore \triangle OEB'\backsim\triangle OB'C'$,$\therefore \frac{B'E}{B'C'}=\frac{OB'}{OC'}$,$\therefore \frac{B'E}{40}=\frac{120}{40\sqrt{10}}$,$\therefore B'E=12\sqrt{10}$,$\therefore FG=12\sqrt{10}$,$\therefore BG=BF-FG=60-12\sqrt{10}$. 设点 A 上升的高度为 h cm. 由题意易得 $\frac{h}{BG}=\frac{OA}{OB}$,即 $\frac{h}{60-12\sqrt{10}}=\frac{40}{120}$,$\therefore h=20-4\sqrt{10}$. 故选 D.



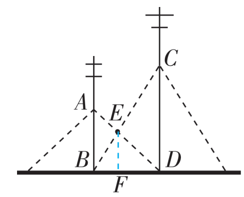
思路分析 画出当点 C 绕点 O 旋转下落到 MN 上时的情形,然后作垂线,结合边角的条件求出 B 点下降的高度,进而根据题意列式计算即可得解.

2. A 【解析】$\because DE$ 和 FG 是两个垂直于水平面且等高的标杆的高度,$\therefore AB\parallel DE\parallel FG$,$\therefore \triangle ABH\backsim\triangle EDH$,$\triangle CFG\backsim\triangle CBA$,$\therefore \frac{DE}{AB}=\frac{EH}{AH}$,$\frac{FG}{BA}=\frac{CG}{CA}$. $\because DE=FG=h_0$,$\therefore \frac{EH}{AH}=\frac{CG}{CA}$,$\therefore \frac{EH}{AE+EH}=\frac{CG}{AE+EG+GC}$,$\therefore (CG-EH)\cdot AE=EH\cdot EG$,$\therefore AE=\frac{EH\cdot EG}{CG-EH}$. $\because AH=AE+EH$,$\therefore AB=\frac{DE\cdot AH}{EH}=\frac{DE(AE+EH)}{EH}=\frac{DE\cdot AE}{EH}+\frac{DE\cdot EH}{EH}=\frac{DE\cdot\frac{EH\cdot EG}{CG-EH}}{EH}+\frac{DE\cdot EH}{EH}=\frac{DE\cdot EG}{CG-EH}+DE$. $\because EG=d$,$DE=h_0$,$EH=m_1$,$CG=m_2$,$\therefore AB=\frac{h_0d}{m_2-m_1}+h_0$. 故选 A.

3. $\frac{40}{17}$ cm 【解析】由题意得 $CI=BI-BC=40-4\times5=20$(cm),$EF=20$ cm,$FG=5$ cm. $\because \angle EFC+\angle CEF=90°$,$\angle EFC+\angle GFI=90°$,$\therefore \angle CEF=\angle GFI$. $\because \angle ECF=\angle FIG=90°$,$\therefore \triangle GIF\backsim\triangle FCE$,$\therefore \frac{FI}{CE}=\frac{FG}{EF}$,即 $\frac{FI}{CE}=\frac{5}{20}$,$\therefore CE=4FI$. 在 $Rt\triangle CEF$ 中,由勾股定理得 $CE^2+CF^2=EF^2$,即 $(4FI)^2+(20-FI)^2=20^2$,解得 $FI=\frac{40}{17}$ 或 $FI=0$(舍去). 故答案为 $\frac{40}{17}$ cm.

思路分析 根据题意得出 $CI=20$ cm,$EF=20$ cm,$FG=5$ cm,证明 $\triangle GIF\backsim\triangle FCE$,根据线段比例关系及勾股定理得出 FI 的长度即可.

4. $\frac{12}{5}$ 米 【解析】作 $EF\perp BD$ 于 F,如图. $\because$ 由题意得 $AB\perp BD$,$CD\perp BD$,$\therefore CD\parallel AB$,$\therefore \triangle CED\backsim\triangle BEA$,$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{DE}{AE}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$,$\therefore \frac{DE}{AD}=\frac{3}{5}$. $\because EF\perp BD$,$\therefore AB\parallel EF$,$\therefore \triangle DEF\backsim\triangle DAB$,$\therefore \frac{EF}{AB}=\frac{DE}{AD}$,$\therefore \frac{EF}{4}=\frac{3}{5}$,$\therefore EF=\frac{12}{5}$ 米. 故答案为 $\frac{12}{5}$ 米.



刷素养

5. (1)【解】根据题意可知,$PG=OQ=u=15$ cm,$OC=f=10$ cm,$PQ=h=10$ cm.

$\because PG\parallel l$,$\therefore \triangle P'OC\backsim\triangle P'PG$,$\therefore \frac{P'O}{P'P}=\frac{OC}{PG}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$,$\therefore \frac{OP}{OP'}=\frac{1}{2}$. $\because PQ\perp l$,$P'Q'\perp l$,$\therefore \angle PQO=\angle P'Q'O=90°$. $\because \angle POQ=\angle P'OQ'$,$\therefore \triangle POQ\backsim\triangle P'OQ'$,$\therefore \frac{PQ}{P'Q'}=\frac{OP}{OP'}$,

即 $\frac{10}{P'Q'}=\frac{1}{2}$,$\therefore P'Q'=20$ cm,即 $h'=20$ cm.

$\because \triangle POQ\backsim\triangle P'OQ'$,$\therefore \frac{OQ}{OQ'}=\frac{OP}{OP'}$,即 $\frac{15}{OQ'}=\frac{1}{2}$,$\therefore OQ'=30$ cm,即 $v=30$ cm. 故答案为 20,30.

(2)【证明】根据题意可知,$PG=OQ=u$,$OC=f$,$OQ'=v$. $\because PG\parallel l$,$\therefore \triangle P'OC\backsim\triangle P'PG$,$\therefore \frac{P'O}{P'P}=\frac{OC}{PG}=\frac{f}{u}$,即 $\frac{OP'}{PP'}=\frac{OP'}{OP'+OP}=\frac{f}{u}$,$\therefore \frac{OP'}{OP}=\frac{f}{u-f}$.

$\because PQ\perp l$,$P'Q'\perp l$,$\therefore \angle PQO=\angle P'Q'O=90°$.

$\because \angle POQ=\angle P'OQ'$,$\therefore \triangle POQ\backsim\triangle P'OQ'$,

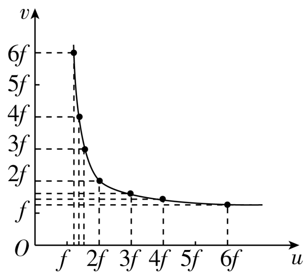
$\therefore \frac{OQ}{OQ'}=\frac{OP}{OP'}$,即 $\frac{u}{v}=\frac{u-f}{f}$,$\therefore uf=v(u-f)$,$uf=vu-vf$,$uf+vf=vu$,

$\therefore f=\frac{vu}{u+v}$,$\therefore \frac{1}{f}=\frac{u+v}{uv}=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$.

(3)【解】列表：

u	…	$\frac{6}{5}f$	$\frac{4}{3}f$	$\frac{3}{2}f$	$2f$	$3f$	$4f$	$6f$	…
v	…	$6f$	$4f$	$3f$	$2f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{4}{3}f$	$\frac{6}{5}f$	…

描点、连线如图所示：



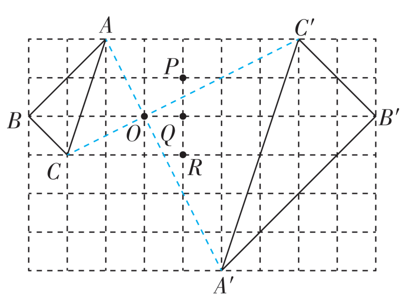
根据函数图象可知，v 随着 u 的增大而减小.

27.3　位似

课时 1　位似图形及性质

刷基础

1. D　【解析】如图，连接 AA'，CC'，交于点 O，∴ 点 O 是位似中心，故选 D.



关键点拨

位似中心是对应点连线的交点.

2. C　【解析】旋转的过程中，只有当点 D 落在线段 AC 和线段 AC 的延长线上时，$\triangle DEC$ 与 $\triangle ABC$ 位似，∴ 有 2 个位置，故选 C.

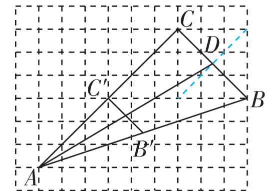
3. D　【解析】∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$是以点 O 为位似中心的位似图形，点 B'，C'，O 在同一直线上，∴ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$AB /\!/ A'B'$，∴ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{OC}{OC'}=\frac{4}{3}$，$\angle BAC=\angle B'A'C'$，∴ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2=\frac{16}{9}$，故 A，B，C 选项不符合题意，D 选项符合题意. 故选 D.

归纳总结

位似图形的特点：①两个图形是相似图形；②对应点的连线都经过同一点；③对应边平行(或在同一条直线上).

4. $2\sqrt{2}\pi$　【解析】∵ 正方形 $ABCD$ 的周长为 4，∴ $AD=1$. ∵ 由勾股定理得 $OA^2+OD^2=AD^2$，∴ $OA=OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ∵ 正边形 $ABCD$ 与正边形 $A'B'C'D'$是位似图形，位似中心是 O，∴ 易知点 O 为正方形 $A'B'C'D'$外接圆的圆心，$\frac{OA}{OA'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{1}{2}$，∴ $OA'=\sqrt{2}$，∴ 正方形 $A'B'C'D'$的外接圆的周长为 $2\pi\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}\pi$，故答案为 $2\sqrt{2}\pi$.

5.【解】(1) 如图所示，AD 即为所求.



(2)①如图所示，$\triangle AB'C'$即为所求.

②$BC=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$.

∵ $\triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$，∴ $\frac{AC'}{B'C'}=\frac{AC}{BC}=\frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=2$. 故答案为 2.

刷易错

6. 5 cm 或 15 cm　【解析】∵ $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 $1:2$，$AO=5$ cm，∴ $A'O=10$ cm. ①$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 在点 O 的同侧时，$AA'=A'O-AO=5$ cm；②$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 在点 O 的异侧时，$AA'=A'O+AO=15$ cm. 故答案为 5 cm 或 15 cm.

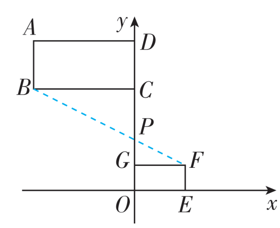
易错警示

位似中心 O 与两三角形的相对位置不确定，故要分类讨论.

课时 2　平面直角坐标系中的位似变换

刷基础

1. C　【解析】如图，连接 BF 交 y 轴于 P. ∵ 四边形 $ABCD$ 和四边形 $EFGO$ 是矩形，点 B，F 的坐标分别为 $(-4,4)$，$(2,1)$，

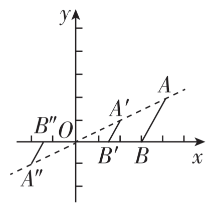


∴ 点 C 的坐标为 $(0,4)$，点 G 的坐标为 $(0,1)$，∴ $CG=3$. ∵ $BC /\!/ GF$，∴ $\triangle GFP \backsim \triangle CBP$，∴ $\frac{GP}{PC}=\frac{GF}{BC}=\frac{1}{2}$，∴ $GP=1$，$PC=2$，∴ 点 P 的坐标为 $(0,2)$. 故选 C.

2. B　【解析】∵ 等边三角形 OAB 的顶点 $O(0,0)$，$B(2,0)$，∴ $OA=OB=2$. 过 A 作 $AC\perp x$ 轴于 C. ∵ $\triangle AOB$ 是等边三角形，∴ $OC=\frac{1}{2}OB=1$，∴ $AC=\sqrt{OA^2-OC^2}=\sqrt{3}$，∴ $A(1,\sqrt{3})$. ∵ $\triangle OA'B'$与 $\triangle OAB$ 位似，位似中心是原点 O，且 $\triangle OA'B'$的面积是 $\triangle OAB$ 面积的 4 倍，∴ $\triangle OA'B'$与 $\triangle OAB$ 的相似比为 2，∴ 点 A 的对应点 A'的坐标是 $(1\times2,\sqrt{3}\times2)$ 或 $(1\times(-2),\sqrt{3}\times(-2))$，即 $(2,2\sqrt{3})$ 或 $(-2,-2\sqrt{3})$，故选 B.

3. $(5,10)$ 【解析】$\because OC:CF=2:3$，$\therefore OC:OF=2:5$. $\because$ $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是以原点 O 为位似中心的位似图形，$\therefore$ 相似比为 $2:5$. $\because A(2,4)$，$\therefore D(5,10)$. 故答案为 $(5,10)$.

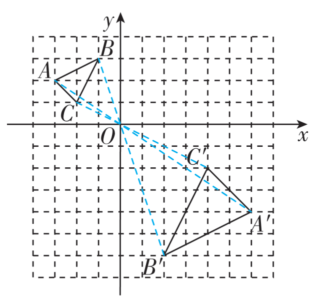
4. D 【解析】画出图形如图所示，故选 D.



5.【解】(1) $\because$ $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别为 $A(-3,2)$，$B(-1,3)$，$C(-2,1)$，且以坐标原点为位似中心，相似比为 $2:1$，在 x 轴下方将 $\triangle ABC$ 放大得到 $\triangle A'B'C'$，$\therefore$ $\triangle A'B'C'$ 三个顶点的坐标分别为 $A'(6,-4)$，$B'(2,-6)$，$C'(4,-2)$. 依次连接三个顶点可得 $\triangle A'B'C'$，如图所示：

易错警示

(1) 画位似图形时要注意所画的位似图形有没有方向性，从而确定可以画出一个还是两个位似图形.

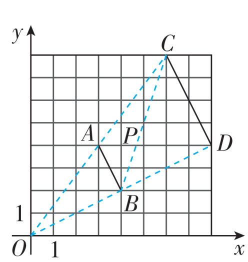


(2) 点 A' 的坐标为 $(6,-4)$，故答案为 $(6,-4)$.

(3) $\because$ 点 P，Q 分别是线段 AB，AC 的中点，$\therefore PQ$ 是 $\triangle ABC$ 的一条中位线，$\therefore PQ=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times\sqrt{1^2+2^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. $\because$ $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 $2:1$，$\therefore P'Q'=2PQ=\sqrt{5}$. 故答案为 $\sqrt{5}$.

刷易错

6. $(0,0)$ 或 $\left(\frac{14}{3},4\right)$ 【解析】如图，当点 A 和点 C 为对应点，点 B 和点 D 为对应点时，连接并延长 CA，DB 交于点 O，则位似中心的坐标是 $(0,0)$. 当点 A 和点 D 为对应点，点 B 和点 C 为对应点时，连接 BC 交 AD 于点 P，则点 P 为位似中心. $\because$ 线段 AB，CD 是位似图形，$\therefore AB/\!/CD$，$\therefore \triangle PAB\backsim\triangle PDC$，$\therefore \frac{AP}{PD}=\frac{AB}{CD}=\frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{2}$，即 $\frac{AP}{5-AP}=\frac{1}{2}$，$\therefore AP=\frac{5}{3}$，$\therefore$ 位似中心 P 的坐标是 $\left(\frac{14}{3},4\right)$. 综上所述，位似中心的坐标是 $(0,0)$ 或 $\left(\frac{14}{3},4\right)$. 故答案为 $(0,0)$ 或 $\left(\frac{14}{3},4\right)$.



易错警示

如果题目未明确对应点，那么注意分类讨论. 如本题应分两种情况：①当点 A 和点 C 为对应点，点 B 和点 D 为对应点时；②当点 A 和点 D 为对应点，点 B 和点 C 为对应点时.

刷提升

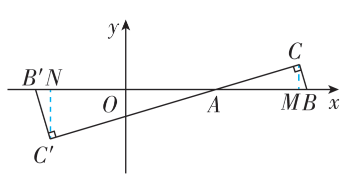
1. D 【解析】$\because$ 矩形 $OA'B'C'$ 与矩形 $OABC$ 关于点 O 位似，且矩形 $OA'B'C'$ 的面积等于矩形 $OABC$ 面积的 $\frac{1}{16}$，$\therefore$ 矩形 $OA'B'C'$ 与矩形 $OABC$ 的相似比为 $1:4$. $\because A(-4,0)$，$C(0,6)$，$\therefore B(-4,6)$，$\therefore B'$ 的坐标为 $\left(-4\times\frac{1}{4},6\times\frac{1}{4}\right)$ 或 $\left(-4\times\left(-\frac{1}{4}\right),6\times\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$，$\therefore$ 点 B 的对应点 B' 的坐标是 $(-1,1.5)$ 或 $(1,-1.5)$. 故选 D.

2. $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$ 【解析】$\because$ 将 $\triangle OAD$ 放大为原来的 2 倍，得到 $\triangle OBC$，点 $D(2,2)$，$\therefore$ 点 $C(2\times2,2\times2)$，即点 $C(4,4)$. $\because$ 点 $D(2,2)$ 是抛物线的顶点，$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y=a(x-2)^2+2$. 将 $C(4,4)$ 代入，得 $4=a(4-2)^2+2$，解得 $a=\frac{1}{2}$，$\therefore$ 抛物线的解析式是 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$. 故答案为 $y=\frac{1}{2}(x-2)^2+2$.

3. (1) -10 (2) $\sqrt{5}$ 【解析】(1) 把 $M(-5,2)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 得 $k=-5\times2=-10$，故答案为 -10.

(2) $\because$ 以点 O 为位似中心，在 MN 所在直线的上方将线段 MN 放大为原来的 n 倍得到线段 $M'N'(n>1)$，$\therefore N'(-n,2n)$. 易知当点 N' 落在反比例函数 $y=-\frac{10}{x}(x<0)$ 的图象上时，n 的值最大，$\therefore -n\cdot2n=-10$，解得 $n_1=\sqrt{5}$，$n_2=-\sqrt{5}$（舍去），$\therefore n$ 的最大值为 $\sqrt{5}$. 故答案为 $\sqrt{5}$.

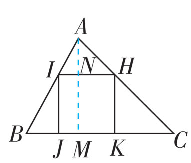
4. $\left(6-2a-\dfrac{2b^2}{a-2},0\right)$ 【解析】如图，过点 C 作 $CM\perp AB$ 于点 M，过点 C' 作 $C'N\perp AB'$ 于点 N，则 $\angle ANC'=\angle AMC=90°$. ∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle AB'C'$ 的相似比为 $1:2$，∴ $\dfrac{AC}{AC'}=\dfrac{1}{2}$，$\angle AC'B'=\angle ACB=90°$. ∵ $\angle NAC'=\angle CAM$，∴ $\triangle ACM\backsim\triangle AC'N$，∴ $\dfrac{AM}{AN}=\dfrac{CM}{C'N}=\dfrac{AC}{AC'}=\dfrac{1}{2}$. ∵ 点 $A(2,0)$，点 $C(a,b)$，∴ $OA=2$，$OM=a$，$CM=b$，∴ $AM=a-2$，∴ $\dfrac{a-2}{AN}=\dfrac{b}{C'N}=\dfrac{1}{2}$，∴ $AN=2a-4$，$C'N=2b$，∴ $AC'^2=AN^2+NC'^2=(2a-4)^2+(2b)^2$. ∵ $\angle C'AB'=\angle C'AN$，$\angle AC'B'=\angle ANC'=90°$，∴ $\triangle AC'N\backsim\triangle AB'C'$，∴ $\dfrac{AB'}{AC'}=\dfrac{AC'}{AN}$，则 $AB'=\dfrac{AC'^2}{AN}=\dfrac{(2a-4)^2+(2b)^2}{2a-4}=2a-4+\dfrac{2b^2}{a-2}$，∴ $OB'=AB'-OA=2a-4+\dfrac{2b^2}{a-2}-2=2a-6+\dfrac{2b^2}{a-2}$. ∵ 点 B' 在 x 轴的负半轴，∴ 点 B' 的坐标为 $\left(-\left(2a-6+\dfrac{2b^2}{a-2}\right),0\right)$，即 $\left(6-2a-\dfrac{2b^2}{a-2},0\right)$. 故答案为 $\left(6-2a-\dfrac{2b^2}{a-2},0\right)$.



思路分析 过点 C 作 $CM\perp AB$ 于点 M，过点 C' 作 $C'N\perp AB'$ 于点 N，利用相似三角形的判定与性质求出 AN 和 NC' 的长，再利用勾股定理求出 AC'^2，然后利用相似三角形的判定与性质求出 AB' 的长，从而确定点 B' 的坐标.

刷素养

5.【解】(1) 如图(1)，作 $AM\perp BC$ 于点 M，交 IH 于点 N. 设正方形 $HIJK$ 的边长为 x.



图(1)

在 Rt$\triangle ABM$ 中，∵ $\angle AMB=90°$，$\angle B=60°$，∴ $\angle BAM=30°$. ∵ $AB=4$，∴ $BM=2$，由勾股定理得 $AM=2\sqrt{3}$. ∵ $\angle C=45°$，∴ $\angle MAC=45°$，∴ $AM=MC=2\sqrt{3}$，∴ $BC=2+2\sqrt{3}$. ∵ $IH/\!/BC$，∴ $\triangle AIH\backsim\triangle ABC$，∴ $\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{IH}{BC}$，∴ $\dfrac{2\sqrt{3}-x}{2\sqrt{3}}=\dfrac{x}{2+2\sqrt{3}}$，∴ $x=\dfrac{6+10\sqrt{3}}{11}$，∴ 小明所作的 $\triangle ABC$ 内面积最大的正方形的边长为 $\dfrac{6+10\sqrt{3}}{11}$.

(2) 如图(2)所示. 作法如下：

①作 $\angle BAC$ 的平分线 AQ；

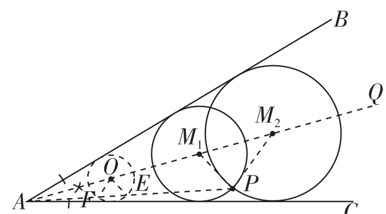
②在 AQ 上取一点 O，作 $\odot O$ 和 AB，AC 相切；

③连接 AP 交 $\odot O$ 于点 E，F，连接 OE，OF；

④过点 P 作 $PM_1/\!/OE$ 交 AQ 于点 M_1；

⑤以点 M_1 为圆心，PM_1 长为半径作 $\odot M_1$，$\odot M_1$ 即为所求.

⑥过点 P 作 $PM_2/\!/OF$ 交 AQ 于点 M_2，以点 M_2 为圆心，PM_2 长为半径作 $\odot M_2$，$\odot M_2$ 即为所求.



图(2)

全章综合训练

刷中考

1. D 【解析】如果两个多边形的对应角相等，对应边成比例，那么这两个多边形是相似多边形. 由题图可知，只有甲和丁的对应角相等，且对应边成比例，所以甲和丁是相似形. 故选 D.

2. B 【解析】∵ 题图中四周网格线构成的四边形是矩形，AC 是其对角线，DE 所在的直线是其对称轴，∴ $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{2}$. ∵ $DE/\!/BC$，∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，∴ $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$，即 $\dfrac{DE}{2}=\dfrac{1}{2}$，∴ $DE=1$. 故选 B.

关键点拨 由网格线特点得出 $DE/\!/BC$，进而得出 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$ 是解题的关键.

3. C 【解析】由题知，点 A_1，B_1，C_1 分别是 AC，BC，AB 的中点，所以 $A_1B_1/\!/AB$，$B_1C_1/\!/AC$，$A_1C_1/\!/BC$，$A_1B_1=\dfrac{1}{2}AB$，$B_1C_1=\dfrac{1}{2}AC$，$A_1C_1=\dfrac{1}{2}BC$，所以易得 $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle BAC$，则 $\dfrac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{A_1B_1}{AB}\right)^2=\dfrac{1}{4}$. 又因为 $\triangle ABC$ 的面积为 1，所以 $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积为 $\dfrac{1}{4}$. 同理可得，$\triangle A_2B_2C_2$ 的面积为 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$，$\triangle A_3B_3C_3$ 的面积为 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$，…，所以 $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为 $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. 故选 C.

4. D 【解析】

选项	分析
A	$\because \angle B+\angle 4=180°$，$\therefore CD /\!/ BM$，$\therefore \angle CDN=\angle AME$. $\because AE /\!/ BC$，$\therefore \angle AEM=\angle CND$，$\therefore \triangle MAE \backsim \triangle DCN$，故 A 不符合题意
B	$\because CD /\!/ AB$，$\therefore \angle CDN=\angle AME$. $\because AE /\!/ BC$，$\therefore \angle AEM=\angle CND$，$\therefore \triangle MAE \backsim \triangle DCN$，故 B 不符合题意
C	$\because AE /\!/ BC$，$\therefore \angle 1+\angle B=180°$. $\because \angle 1=\angle 4$，$\therefore \angle B+\angle 4=180°$. 由 A 可知 $\triangle MAE \backsim \triangle DCN$，故 C 不符合题意
D	根据 $\angle 2=\angle 3$，再结合已知条件不能证明 $\triangle MAE \backsim \triangle DCN$，故 D 符合题意

故选 D.

关键点拨 本题考查相似三角形的判定，熟练运用相似三角形的判定方法是解题的关键.

5.【解】(1)把 $A(1,4)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 得 $4=\frac{k}{1}$，$\therefore k=4$，$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y=\frac{4}{x}$. 把 $B(4,m)$ 代入 $y=\frac{4}{x}$ 得 $m=\frac{4}{4}=1$，$\therefore B(4,1)$. $\because$ 一次函数 $y=ax+b$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象相交于 $A(1,4)$，$B(4,1)$ 两点，$\therefore \begin{cases}4=a+b,\\1=4a+b,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a=-1,\\b=5,\end{cases}$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y=-x+5$.

(2)设 $P(m,0)$. $\because$ 点 D 与点 A 关于点 O 对称，$A(1,4)$，$\therefore OA=OD=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$. $\because$ 直线 AB 与 x 轴交于 $C(5,0)$，$\therefore OC=5$. $\because \triangle AOC$ 与 $\triangle POD$ 相似，$\angle AOC=\angle POD$，$\therefore \triangle AOC \backsim \triangle DOP$ 或 $\triangle AOC \backsim \triangle POD$，$\therefore \frac{OA}{OD}=\frac{OC}{OP}$ 或 $\frac{OA}{OP}=\frac{OC}{OD}$，$\therefore \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}=\frac{5}{OP}$ 或 $\frac{\sqrt{17}}{OP}=\frac{5}{\sqrt{17}}$，$\therefore OP=5$ 或 $OP=\frac{17}{5}$，$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-5,0)$ 或 $\left(-\frac{17}{5},0\right)$.

易错警示 (2)当 $\triangle AOC$ 与 $\triangle POD$ 相似时，有 $\triangle AOC \backsim \triangle DOP$ 和 $\triangle AOC \backsim \triangle POD$ 两种情况，不要漏解.

6.【解】(1)$\because BC=2$ m，面积为 1.5 m^2，$\therefore AC=\frac{1.5}{\frac{1}{2}\times 2}=1.5$(m)，$\therefore AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=2.5$ m.

设正方形的边长为 x m. 如题图(1)，$\because$ 四边形 $CDEF$ 是正方形，$\therefore \angle ADE=\angle C=90°$，$DE=CD=x$，$AD=1.5-x$. $\because \angle A=\angle A$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADE \backsim \mathrm{Rt}\triangle ACB$，$\therefore \frac{DE}{CB}=\frac{AD}{AC}$，即 $\frac{x}{2}=\frac{1.5-x}{1.5}$，解得 $x=\frac{6}{7}$. 如题图(2)，$\because$ 四边形 $GDEF$ 是正方形，$\therefore DE /\!/ GF$，$\therefore \angle CED=\angle B$，$\angle EDC=\angle A$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle DEC \backsim \mathrm{Rt}\triangle ABC$，$\therefore \frac{DC}{DE}=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}$，即 $\frac{DC}{DE}=\frac{3}{5}$，$\therefore DC=\frac{3}{5}x$，$\therefore AD=AC-DC=\frac{3}{2}-\frac{3}{5}x$. $\because \angle A=\angle A$，$\angle AGD=\angle C=90°$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADG \backsim \mathrm{Rt}\triangle ABC$，$\therefore \frac{DG}{DA}=\frac{BC}{AB}$，即 $\frac{x}{\frac{3}{2}-\frac{3}{5}x}=\frac{4}{5}$，解得 $x=\frac{30}{37}$. $\because \frac{6}{7}>\frac{30}{37}$，$\therefore$ 题图(1)的正方形面积较大.

(2)如题图(3)，$\because$ 四边形 $CDEF$ 是长方形，$\therefore \angle ADE=\angle C=90°$，$DE=CF=x$. $\because \angle A=\angle A$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADE \backsim \mathrm{Rt}\triangle ACB$，$\therefore \frac{AD}{DE}=\frac{AC}{CB}=\frac{3}{4}$，则 $AD=\frac{3}{4}x$，$\therefore DC=AC-AD=\frac{6-3x}{4}$，$\therefore$ 长方形的面积 $y=DE\times DC=x\cdot\frac{6-3x}{4}=-\frac{3}{4}(x-1)^2+\frac{3}{4}$. $\because -\frac{3}{4}<0$，$\therefore$ 图象开口向下，$\therefore$ 当 $x=1$ 时，长方形的面积有最大值为 $\frac{3}{4}$ m^2. 在题图(4)中，同理得 $\mathrm{Rt}\triangle DEC \backsim \mathrm{Rt}\triangle ABC$，$\therefore \frac{DE}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{3}$，$\therefore DC=\frac{3}{5}x$，$\therefore DA=AC-DC=\frac{3}{2}-\frac{3}{5}x$. 同理得 $\mathrm{Rt}\triangle ADG \backsim \mathrm{Rt}\triangle ABC$，$\therefore \frac{DG}{DA}=\frac{BC}{BA}=\frac{4}{5}$，则 $DG=\frac{4}{5}DA=\frac{4}{5}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{5}x\right)$，$\therefore$ 长方形的面积 $y=DE\times DG=x\times\frac{4}{5}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{5}x\right)=-\frac{12}{25}\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{3}{4}$. $\because -\frac{12}{25}<0$，$\therefore$ 图象开口向下，$\therefore$ 当 $x=\frac{5}{4}$ 时，长方形的面积有最大值为 $\frac{3}{4}$ m^2.

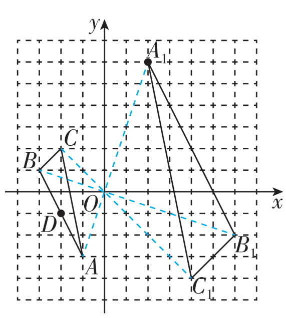
7. B 【解析】∵ $AC\perp AB$，$BD\perp AB$，∴ $AC/\!/BD$，∴ $\triangle AOC\backsim\triangle BOD$，∴ $\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{OA}{OB}$. ∵ $OA=150$ cm，$OB=50$ cm，$BD=20$ cm，∴ $\dfrac{AC}{20}=\dfrac{150}{50}$，∴ $AC=60$ cm. 故选 B.

8. D 【解析】以原点 O 为位似中心，将这个矩形按相似比$\dfrac{1}{3}$缩小，则顶点 B 在第一象限对应点的坐标是$\left(3\times\dfrac{1}{3},2\times\dfrac{1}{3}\right)$，即$\left(1,\dfrac{2}{3}\right)$，故选 D.

9. 1∶3 【解析】∵ $\triangle AOB$ 放大后得到$\triangle COD$，∴ $\triangle AOB\backsim\triangle COD$，∴ $\triangle AOB$ 与$\triangle COD$ 的相似比为 $OB:OD=2:6=1:3$. 故答案为 1∶3.

10.【解】(1)如图所示，D 点即为所求，D 点坐标为$(-2,-1)$.

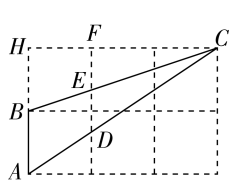
(2)如图所示，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.



刷章测

1. C 【解析】A 选项，两个等边三角形相似，但是两个等腰三角形不一定相似，故 A 不符合题意；B 选项，两个平行四边形对应角不一定相等，对应边不一定成比例，所以不一定相似，故 B 不符合题意；C 选项，两个正五边形的对应角相等，对应边成比例，两图形相似，故 C 符合题意；D 选项，两个正六边形相似，但是两个六边形不一定相似，故 D 不符合题意. 故选 C.

2. B 【解析】如图，取格点 H，F. ∵ 正方形网格中每个小正方形的边长为 1，∴ $AB=1$，$CF=2$，$CH=3$.



∵ $EF/\!/BH$，∴ $\dfrac{CE}{CB}=\dfrac{CF}{CH}=\dfrac{2}{3}$. ∵ $DE/\!/AB$，∴ $\triangle DEC\backsim\triangle ABC$，∴ $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{CE}{CB}=\dfrac{2}{3}$，∴ $DE=\dfrac{2}{3}AB=\dfrac{2}{3}$，故选 B.

3. D 【解析】∵ $\angle ACD=\angle B$，$\angle CAD=\angle BAC$，∴ $\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，故选项 A 的结论正确. ∵ $\triangle ACD\backsim\triangle ABC$，∴ $\angle ADC=\angle ACB$. 又∵ $\angle BAG=\angle CAE$，∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ACG$，故选项 B 的结论正确. ∵ $\angle BAG=\angle CAE$，$\angle ACD=\angle B$，∴ $\triangle ACE\backsim\triangle ABG$，故选项 C 的结论正确. 由已知条件无法证明$\triangle ADE\backsim\triangle CGE$，故选项 D 的结论错误. 故选 D.

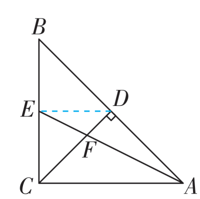
思路分析 设较大的五边形的面积为 x cm^2，根据相似多边形的面积比等于相似比的平方列出方程，解方程即可求解.

4. C 【解析】设较大的五边形的面积为 x cm^2. 依题意，得$\dfrac{x-28}{x}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$，解得 $x=64$，即较大的五边形的面积为 64 cm^2. 故选 C.

5. D 【解析】∵ 正方形 $ABCD$ 与正方形 $BEFG$ 是以原点 O 为位似中心的位似图形，且相似比为$\dfrac{1}{3}$，∴ $\dfrac{AD}{BG}=\dfrac{1}{3}$. ∵ $BG=6$，∴ $AD=BC=2$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，∴ $AD/\!/BG$，$AB=AD=2$，∴ $\triangle OAD\backsim\triangle OBG$，∴ $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{AD}{BG}=\dfrac{1}{3}$，∴ $\dfrac{OA}{2+OA}=\dfrac{1}{3}$，∴ $OA=1$，∴ $OB=3$，∴ C 点坐标为$(3,2)$，故选 D.

思路分析 连接 DE，利用等腰三角形"三线合一"得出 DE 是$\triangle ABC$ 的中位线，则 $DE/\!/AC$，得出$\triangle DEF\backsim\triangle CAF$，即可解决问题.

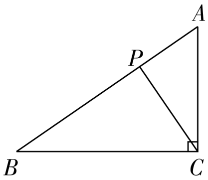
6. C 【解析】连接 DE，如图所示. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=4$，∴ $AB=4\sqrt{2}$. ∵ $CD\perp AB$，∴ $AD=BD$，



∴ $CD=\dfrac{1}{2}AB=2\sqrt{2}$. ∵ E 为 BC 的中点，∴ DE 是$\triangle ABC$ 的中位线，∴ $DE/\!/AC$，$DE=\dfrac{1}{2}AC=2$，∴ $\triangle DEF\backsim\triangle CAF$，∴ $\dfrac{DF}{CF}=\dfrac{DE}{AC}=\dfrac{1}{2}$，∴ $DF=\dfrac{1}{3}CD=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. 故选 C.

7. D 【解析】∵ $\angle ACB=90°$，$AC=3$ cm，$AB=5$ cm，∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=4$ cm. 当$\triangle ACB\backsim\triangle PCA$ 时，易知点 P 在 BC 上，$\dfrac{CP}{AC}=\dfrac{AC}{BC}$，∴ $\dfrac{CP}{3}=\dfrac{3}{4}$，∴ $CP=\dfrac{9}{4}$ cm. ∵ 点 P 从点 C 出发以 1 cm/s 的速度运动，∴ $t=\dfrac{\frac{9}{4}}{1}=\dfrac{9}{4}$. 当

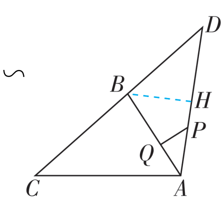
$\triangle ACB\backsim\triangle APC$ 时，如图，



$\frac{BC}{CP}=\frac{AB}{AC}$，$\angle APC=\angle ACB=90°$，$\therefore \frac{4}{CP}=\frac{5}{3}$，$\therefore CP=\frac{12}{5}$ cm，$\therefore BP=\sqrt{BC^2-CP^2}=\frac{16}{5}$ cm，$\therefore BP+BC=\frac{36}{5}$ cm. ∵ 点 P 从点 C 出发以 1 cm/s 的速度运动，$\therefore t=\frac{\frac{36}{5}}{1}=\frac{36}{5}$. 综上所述，$t$ 的值为 $\frac{9}{4}$ 或 $\frac{36}{5}$ 时，以点 A,P,C 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似. 故选 D.

易错警示 以点 A,P,C 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似（不全等）包含两种情况，$\triangle ACB\backsim\triangle PCA$ 和 $\triangle ACB\backsim\triangle APC$，注意分类讨论，不要漏解.

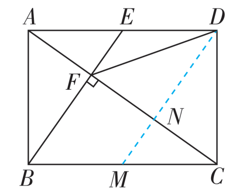
8. A 【解析】∵ $\triangle DAB\backsim\triangle DCA$，$\therefore \frac{AD}{DC}=\frac{BD}{AD}$，$\therefore \frac{6}{5+BD}=\frac{BD}{6}$，解得 $BD=4$（负值已舍去），$\therefore \frac{AC}{AB}=\frac{CD}{AD}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$，$\therefore AC=\frac{3}{2}AB$. ∵ $AC^2=AB\cdot(AB+BC)$，$\therefore \left(\frac{3}{2}AB\right)^2=AB\cdot(AB+BC)$，$\therefore AB=4$，$\therefore AB=BD$. 如图，过 B 作 $BH\perp AD$ 于 H，$\therefore AH=\frac{1}{2}AD=3$，$\therefore BH=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$. ∵ $AD=3AP$，$AD=6$，$\therefore AP=2$. 当 $PQ\perp AB$ 时，PQ 的值最小，此时 $\angle AQP=\angle AHB=90°$.



∵ $\angle PAQ=\angle BAH$，$\therefore \triangle APQ\backsim\triangle ABH$，$\therefore \frac{AP}{AB}=\frac{PQ}{BH}$，$\therefore \frac{2}{4}=\frac{PQ}{\sqrt{7}}$，$\therefore PQ=\frac{\sqrt{7}}{2}$. 故选 A.

9. ±10 【解析】∵ 点 $M(1,3)$，$N(4,3)$，以点 O 为位似中心，将线段 MN 放大为原来的 2 倍得到线段 $M'N'$，$\therefore M'(2,6)$，$N'(8,6)$ 或 $M'(-2,-6)$，$N'(-8,-6)$. 当二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象过 $M'(2,6)$，$N'(8,6)$ 时，$-\frac{b}{2}=\frac{2+8}{2}$，解得 $b=-10$；当二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象过 $M'(-2,-6)$，$N'(-8,-6)$ 时，$-\frac{b}{2}=\frac{-2-8}{2}$，解得 $b=10$. 综上，$b=\pm10$，故答案为±10.

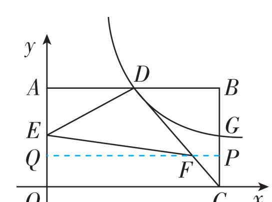
10. ①②③ 【解析】如图，过 D 作 $DM/\!/BE$ 交 AC 于 N，交 BC 于 M.



∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AD/\!/BC$，$\angle ABC=90°$，$AD=BC$，$\therefore \angle EAC=\angle ACB$. ∵ $BE\perp AC$ 于点 F，$\therefore \angle ABC=\angle AFE=90°$，$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle CAB$，故①正确. ∵ $AD/\!/BC$，$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle CBF$，$\therefore \frac{AE}{BC}=\frac{AF}{CF}$. ∵ $AE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，$\therefore \frac{AF}{CF}=\frac{1}{2}$，$\therefore CF=2AF$，故②正确. ∵ $DE/\!/BM$，$BE/\!/DM$，$\therefore$ 四边形 $BMDE$ 是平行四边形，$\therefore BM=DE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，$\therefore BM=CM$，$\therefore CN=NF$. ∵ $BE\perp AC$ 于点 F，$DM/\!/BE$，$\therefore DN\perp CF$，$\therefore DM$ 垂直平分 CF，$\therefore DF=DC$，故③正确. 设 $AE=a$，$AB=b$，则 $AD=2a$. ∵ $\angle ABE+\angle AEB=\angle EAF+\angle AEB=90°$，$\therefore \angle ABE=\angle EAF$. ∵ $\angle BAE=\angle ADC=90°$，$\therefore \triangle BAE\backsim\triangle ADC$，$\therefore \frac{AB}{AE}=\frac{AD}{DC}$，$\therefore \frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $b=\sqrt{2}a$，$\therefore \frac{CD}{AD}=\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $DC:AD=\sqrt{2}:2$，故④错误. 故答案为①②③.

关键点拨 本题主要考查相似三角形的判定与性质，利用相似三角形的判定与性质表示出 FP，CP 的长是解题的关键.

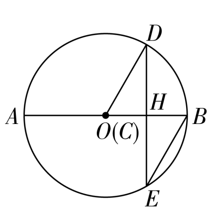
11. 8 【解析】设矩形 $OABC$ 中，$OA=2a$，$AB=2b$. ∵ D,E 分别是 AB,OA 的中点，



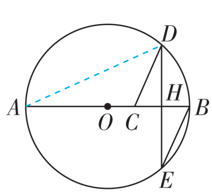
$\therefore$ 点 $D(b,2a)$，$E(0,a)$. 如图，过点 F 作 $FP\perp BC$ 于点 P，延长 PF 交 OA 于点 Q. ∵ 四边形 $OABC$ 是矩形，$\therefore \angle QOC=\angle OCP=\angle CPQ=90°$，$\therefore$ 四边形 $OCPQ$ 是矩形，$\therefore OQ=PC$，$PQ=OC=2b$. ∵ $FP\perp BC$，$AB\perp BC$，$\therefore FP/\!/DB$，$\therefore \triangle CFP\backsim\triangle CDB$，$\therefore \frac{CP}{CB}=\frac{FP}{DB}=\frac{CF}{CD}$，即 $\frac{CP}{2a}=\frac{FP}{b}=\frac{1}{3}$，$\therefore CP=\frac{2}{3}a$，$FP=\frac{b}{3}$，则 $EQ=EO-OQ=\frac{a}{3}$，$AQ=AO-OQ=\frac{4}{3}a$，$FQ=PQ-PF=\frac{5}{3}b$.

∵ $\triangle DEF$ 的面积为 4，∴ $S_{梯形ADFQ}-S_{\triangle ADE}-S_{\triangle EFQ}=4$，即 $\frac{1}{2}\cdot\left(b+\frac{5}{3}b\right)\cdot\frac{4}{3}a-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}b\cdot\frac{1}{3}a=4$，∴ $ab=4$，则 $k=2ab=8$.

12. 2　$\frac{9}{2}$　【解析】当点 C 与点 O 重合时，设 DE 与 BC 交于点 H，如图(1)所示. ∵ ⊙O 的直径 $AB=4$，∴ $BC=CD=2$. ∵ DE 是 CB 的垂直平分线，∴ $CH=BH$. 根据垂径定理得 $DH=EH$. 在 $\triangle DCH$ 和 $\triangle EBH$ 中，$\begin{cases}CH=BH,\\ \angle DHC=\angle EHB,\\ DH=EH,\end{cases}$ ∴ $\triangle DCH\cong\triangle EBH$(SAS)，∴ $CD=BE=2$. 如图(2)所示，连接 AD，设 DE 与 BC 交于点 H. 设 $CH=BH=x$，∴ $BC=2x$，$AH=AB-BH=4-x$，∴ $AC=AB-BC=4-2x$. ∵ $\angle A=\angle E$，$\angle AHD=\angle EHB$，∴ $\triangle AHD\backsim\triangle EHB$，∴ $\frac{AH}{EH}=\frac{DH}{BH}$. ∵ $DH=EH$，∴ $EH^2=BH\cdot AH=x(4-x)$. 在 Rt $\triangle EHB$ 中，由勾股定理得 $BE=\sqrt{HE^2+BH^2}=\sqrt{x(4-x)+x^2}=2\sqrt{x}$，∴ $AC+BE=4-2x+2\sqrt{x}=-2\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$，∴ 当 $\sqrt{x}-\frac{1}{2}=0$ 时，$AC+BE$ 的值最大，最大值为 $\frac{9}{2}$，此时 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，符合题意. 故答案为 2，$\frac{9}{2}$.



图(1)

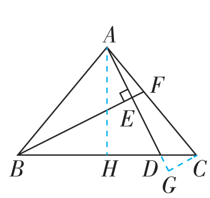


图(2)

▶**思路分析**

本题中求 $AC+BE$ 的最大值时，设 $CH=BH=x$，则 $AC=4-2x$，$AH=4-x$，再利用相似三角形的判定与性质并结合勾股定理求出 $BE=2\sqrt{x}$，然后利用配方法求最值即可.

13. (1)10　(2)$\frac{4\sqrt{5}}{11}$　【解析】(1)如图，过 A 作 $AH\perp BC$ 于 H. 设 $\angle ACB=\alpha$，则 $\angle BAD=90°-\frac{1}{2}\alpha$. ∵ $BF\perp AD$，∴ $\angle AEB=90°$，∴ $\angle ABE=90°-\angle BAE=\frac{1}{2}\alpha$. ∵ $AB=AC$，∴ $\angle ABC=\angle ACB$，∴ $\angle ABE=\frac{1}{2}\alpha=\angle CBE$. ∵ $\angle AEB=\angle DEB=90°$，$BE=BE$，∴ $\triangle ABE\cong\triangle DBE$(ASA)，∴ $AE=DE$，$AB=BD$，∴ $AE=DE=\frac{1}{2}AD=2\sqrt{5}$. 设 $AB=BD=AC=x$，∴ $BC=x+2$，∴ $BH=CH=\frac{x+2}{2}$，∴ $DH=\frac{x+2}{2}-2$. ∵ $\angle AHD=\angle BED=90°$，$\angle ADH=\angle BDE$，∴ $\triangle ADH\backsim\triangle BDE$，∴ $\frac{AD}{BD}=\frac{DH}{DE}$，∴ $\frac{4\sqrt{5}}{x}=\frac{\frac{x+2}{2}-2}{2\sqrt{5}}$，∴ $x_1=-8$(舍去)，$x_2=10$. 经检验，$x=10$ 是原分式方程的解，∴ $BD=10$. 故答案为 10.

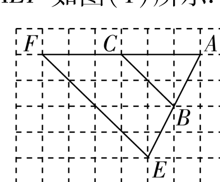


(2)由(1)知 $AB=BD=AC=10$，$DH=4$，$BH=6$，∴ $AH=8$. 如图，过 C 作 $CG\perp AD$ 交 AD 的延长线于 G，∴ $\angle G=\angle AHD=90°$. ∵ $\angle ADH=\angle CDG$，∴ $\triangle ADH\backsim\triangle CDG$，∴ $\frac{AD}{CD}=\frac{AH}{CG}=\frac{DH}{DG}$，∴ $\frac{4\sqrt{5}}{2}=\frac{8}{CG}=\frac{4}{DG}$，∴ $CG=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，$DG=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ∵ $EF\perp AD$，$CG\perp AD$，∴ $EF/\!/CG$，∴ $\triangle AEF\backsim\triangle AGC$，∴ $\frac{EF}{CG}=\frac{AE}{AG}$，即 $\frac{EF}{\frac{4\sqrt{5}}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}}$，解得 $EF=\frac{4\sqrt{5}}{11}$. 故答案为 $\frac{4\sqrt{5}}{11}$.

▶**思路分析**

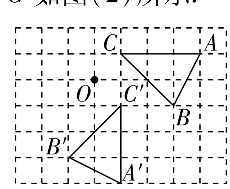
(2)由(1)利用勾股定理得 $AH=8$. 过 C 作 $CG\perp AD$ 交 AD 的延长线于 G，证明 $\triangle ADH\backsim\triangle CDG$，$\triangle AEF\backsim\triangle AGC$，再根据相似三角形的性质即可得到答案.

14.【解】(1)$\triangle AEF$ 如图(1)所示.



图(1)

(2)$\triangle A'B'C'$ 如图(2)所示.



图(2)

15.【证明】(1)在正方形 $ABCD$ 中,$\angle BAC=45°$.

$\because \angle EBF=45°$,$\therefore \angle BAC=\angle EBF$.

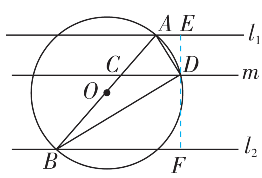
$\because \angle BFE=\angle AFB$,$\therefore \triangle ABF\backsim\triangle BEF$.

(2)$\because \triangle ABF\backsim\triangle BEF$,$\therefore \frac{AF}{BF}=\frac{BF}{EF}$,$\therefore BF^2=AF\cdot EF$. 同理可证$\triangle BCE\backsim\triangle FBE$,

$\therefore \frac{BE}{EF}=\frac{CE}{BE}$,$\therefore BE^2=CE\cdot EF$,

$\therefore \left(\frac{BE}{BF}\right)^2=\frac{CE\cdot EF}{AF\cdot EF}=\frac{CE}{AF}$.

16.【解】如图,过点 D 作 $DE\perp l_1$ 于点 E,延长 ED 交 l_2 于点 F.



$\because l_1/\!/l_2$,$\therefore DF\perp l_2$. $\because l_1/\!/l_2/\!/m$,$\therefore \frac{DE}{DF}=\frac{AC}{BC}=\frac{2}{3}$. 设 $DE=2x$,则 $DF=3x$. $\because EF=6$,$\therefore 2x+3x=6$,解得 $x=\frac{6}{5}$,$\therefore DE=\frac{12}{5}$,$DF=\frac{18}{5}$. $\because AB$ 是$\odot O$ 的直径,$\therefore \angle ADB=90°$,$\therefore \angle ADE+\angle BDF=90°$.

$\because \angle ADE+\angle DAE=90°$,$\therefore \angle DAE=\angle BDF$.

$\because \angle AED=\angle DFB=90°$,$\therefore \triangle DAE\backsim\triangle BDF$,

$\therefore \frac{AD}{BD}=\frac{DE}{BF}$. 在 Rt$\triangle BDF$ 中,$BD=6$,$DF=\frac{18}{5}$,

$\therefore BF=\sqrt{BD^2-DF^2}=\sqrt{6^2-\left(\frac{18}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$,$\therefore \frac{AD}{6}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{24}{5}}$,$\therefore AD=3$. 在 Rt$\triangle ABD$ 中,$BD=6$,$AD=3$,$\therefore AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$.

故 AB 的长为 $3\sqrt{5}$.

17.【解】(1)$\because AB/\!/CD$,$\therefore \triangle ECD\backsim\triangle EBA$,

$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{EC}{EB}$. $\because CE=3$ 米,$BC=5.7$ 米,$CD=2$ 米,$\therefore EB=EC+BC=3+5.7=8.7$(米),

$\therefore \frac{2}{AB}=\frac{3}{8.7}$,$\therefore AB=5.8$ 米.

答:路灯的高度 AB 为 5.8 米.

(2)他们计划测量的线段是 EG. $\because AB/\!/CD$,$\therefore \triangle ECD\backsim\triangle EBA$,$\therefore \frac{CD}{AB}=\frac{EC}{EB}$. 又$\because CE=3$ 米,$CD=2$ 米,$\therefore \frac{2}{AB}=\frac{3}{3+BC}$,$\therefore 3+BC=\frac{3}{2}AB$. $\because AB/\!/EF$,$\therefore \triangle EFG\backsim\triangle BAG$,$\therefore \frac{GE}{GB}=\frac{EF}{AB}$. 又$\because EF=2$ 米,$GE=m$ 米,$\therefore \frac{2}{AB}=\frac{m}{m+3+BC}$,$\therefore \frac{2}{AB}=\frac{m}{m+\frac{3}{2}AB}$,$\therefore AB=\frac{2m}{m-3}$米.

故答案为 EG,$\frac{2m}{m-3}$.

思路分析

(1)由$\angle EBF=45°$及正方形的性质得$\angle BAC=45°$,进而可证$\triangle ABF\backsim\triangle BEF$;(2)同(1)的方法可证$\triangle BCE\backsim\triangle FBE$,结合$\triangle ABF\backsim\triangle BEF$利用相似三角形对应边成比例的性质即可解决问题.

关键点拨

本题考查了相似三角形的判定与性质、平行分线段成比例等,解决本题的关键是证明$\triangle DAE\backsim\triangle BDF$.

18.(1)【证明】$\because \angle A=\angle B=\angle ECF=90°$,

$\therefore \angle ACE+\angle BCF=\angle ACE+\angle AEC=90°$,

$\therefore \angle BCF=\angle AEC$,$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle BFC$,

$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{CB}{BF}$. $\because AC=BD$,$\therefore AC+CD=BD+CD$,

$\therefore AD=BC$,$\therefore \frac{AE}{BD}=\frac{AD}{BF}$. $\because \angle A=\angle B=90°$,

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle BFD$,$\therefore \angle BDF=\angle AED$.

$\because \angle EDF+\angle BDF=\angle A+\angle AED$,$\therefore \angle EDF=\angle A=90°$.

(2)【证明】$\because AE=BE$,$\therefore \angle A=\angle B$.

$\because \angle AEC=180°-\angle A-\angle ACE$,$\angle BCF=180°-\angle ECF-\angle ACE$,$\angle A=\angle ECF$,$\therefore \angle AEC=\angle BCF$,$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle BFC$,$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{CB}{BF}$.

$\because \angle AEC=\angle BED$,$AE=BE$,$\angle A=\angle B$,

$\therefore \triangle AEC\cong\triangle BED$(ASA),$\therefore AC=BD$,

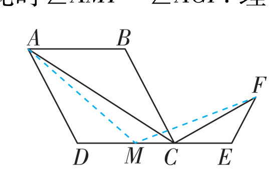
$\therefore AD=BC$,$\therefore \frac{AE}{BD}=\frac{AD}{BF}$. $\because \angle A=\angle B$,

$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle BFD$,$\therefore \angle BDF=\angle AED$.

$\because \angle EDF+\angle BDF=\angle A+\angle AED$,

$\therefore \angle EDF=\angle A$.

(3)【解】如图,在 DC 上截取 $DM=CE$,连接 AM,MF,此时$\angle AMF=\angle ACF$. 理由如下:



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,$\therefore AB=CD$,$BC=DA$. $\because AC=CA$,$\therefore \triangle CBA\cong\triangle ADC$.

$\because \triangle CEF\backsim\triangle CBA$,$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle CEF$,

$\therefore \angle DAC=\angle ECF$. 同(1)(2)可证得$\angle AMF=\angle D$. $\because \angle ACF+\angle ECF=\angle DAC+\angle D$,$\therefore \angle ACF=\angle D$,$\therefore \angle AMF=\angle ACF$.